

$$u(x, 0) = \int_0^x \alpha(\xi) u(\xi, T) d\xi, \quad 0 < x < l; \quad (5)$$

$$u(x, T) = \int_0^x \beta(\xi) u(\xi, 0) d\xi, \quad -l < x < 0, \quad (6)$$

где $\varphi_{-l}(t), \varphi_l(t) \in C[0, T], \alpha(x) \in C[0, l];$
 $\beta(x) \in C[-l, 0],$ причём $0 < \alpha(x) < 1 \quad \forall x \in [0, l];$
 $0 < \beta(x) < 1 \quad \forall x \in [-l, 0].$

Задача 2. Найти регулярное в $D \setminus \{x = 0\}$ решение $u(x, t)$ уравнения (3) из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(D)$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u(-l, t) = \varphi_{-l}(t); \quad (7)$$

$$\alpha_1 u_x(0, t) + \alpha_2 u_x(l, t) = \beta_l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

и нелокальным начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad 0 < x < l; \quad (9)$$

$$u(x, T) = \varphi_T(x) \quad -l < x < 0, \quad (10)$$

где $\varphi_{-l}(t), \beta_l(t), \varphi_0(x), \varphi_T(x)$ – заданные, достаточно гладкие функции.

Используя функцию Грина смешанной краевой задачи и некоторые элементарные преобразования вопрос существования решения данных задач эквивалентно редуцирован к вопросу существования решения системы интегральных уравнений. Для доказательства единственности поставленных задач использован принцип экстремума для параболических уравнений.

Асимптотическая N-устойчивость множества M

В.А. Миненко
БГПУ, г. Барнаул

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

или в векторном виде

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x).$$

Правые части уравнений системы (1) непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения в области $Z = I_t^+ \times D$ где $I_t^+ = (t, +\infty)$, D – область действительного n -мерного евклидова пространства.

Решение рассматриваемой системы с начальными значениями t_0, x_0 обозначим так: $x = x(t, x_0, t_0)$, расстояние точки x до множества E обозначим так: $p(x, E)$.

Пусть непустое множество N таково, что для некоторого положительного числа α $N^\alpha = \{x: p(x, N)\} \subset D$.

Рассмотрим непустое множество $M \subset N$.

Определение. Множество M называется асимптотически N -устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \in (t, +\infty)$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого решения $x = x(t, x_0, t_0)$ системы (1), для которого $x_0 \in M^\delta$, выполняется:

$$\text{на } [t_0, +\infty] \quad p(x(t, x_0, t_0), N) < \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p(x(t, x_0, t_0), N) = 0.$$

Будем предполагать, что решения системы (1), остающиеся при росте t в D' ($D' \subset D, D'$ – замкнуто), продолжаемы по t вправо.

Теорема. Для того, чтобы множество M было асимптотически N -устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $V = V(t, x)$, определенная на $I_t^+ \times N^r$, $r < \alpha$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Для любого числа $\gamma > 0$ и любого $t_0 \in I_t^+$ существует такое число $\beta > 0$, что при $x \in M^\beta \cap N^r$, $V(t_0, x) < \gamma$;
2. Для любого числа $c_1 > 0$ существует такое число $c_2 > 0$, что $V(t, x) > c_2$ при $x \in N^r$, $p(x, N) > c_1$;
3. $V(t, x(t, x_0, t_0))$ не возрастает на $[t_0, t_0^r)$ при $x_0 \in N^r$, где $[t_0, t_0^r)$ – максимальный полуинтервал, на котором $x(t, x_0, t_0) \in N^r$;

4. Для любого $t_0 \in I_t^+$ существует M^δ такое, что при $x_0 \in M^\delta$
- $$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, x(t, x_0, t_0)) = 0.$$

Разрешимость модельной задачи о движении динамически нейтральной примеси в тающем снеге

А.А. Папин, Н.С. Исаева

АлтГУ, г. Барнаул

Тающий снег рассматривается как трехфазная сплошная среда, состоящая из воды ($i=1$), воздуха ($i=2$) и льда ($i=3$). В основу математической модели положены уравнения сохранения массы для каждой из фаз [1], уравнения двухфазной фильтрации Маскета-Леверегга для воды и воздуха [2], уравнение теплового баланса снега [1] и уравнение диффузии для примеси [3]. Рассматриваемая система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_1\rho_1^0) + \operatorname{div}(\rho_1^0\vec{v}_1) = I_{13}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(ms_2\rho_2^0) + \operatorname{div}(\rho_2^0\vec{v}_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_3^0(1-m)) = -I_{13},$$

$$\vec{v}_i = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i=1,2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad s_1 + s_2 = 1,$$

$$\left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0(\theta)c_i\alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i^0(\theta)c_i\vec{v}_i \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) + \nu \frac{\partial \rho_3^0 \alpha_3}{\partial t},$$

$$S + \frac{\partial}{\partial t}(ms_1\sigma) + \operatorname{div}(\sigma\vec{v}_1 - D\nabla\sigma) = 0.$$

Здесь ρ_i^0 , $\vec{v}_i = ms_i\vec{u}_i$ – соответственно истинные плотности воды, воздуха, льда и скорости фильтрации воды и воздуха, I_{13} – интенсивность перехода массы из 1-ой в 3-ю составляющую в единице объема и в единицу времени; m – пористость, s_1 , s_2 – насыщенности воды и воздуха, \vec{u}_i – истинные скорости фаз; K_0 – тензор фильтрации, k_{0i} – относительные фазовые проницаемости ($k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$, $k_{0i}|_{s_i=0} = 0$), μ_i – коэффициенты динамической вязкости, p_i – давления фаз, p_c – капиллярное давление, \vec{g} – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta$, $i=1,2,3$), $c_i > 0$ – теплоемкость i -й фазы при постоянном давлении, α_i – концентрация фаз ($\alpha_i = ms_i$, $i=1,2$, $\alpha_3 = 1-m$), $\nu > 0$ – удельная теплота плавления льда, λ_c – коэффициент теплопро-