МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики

**В.В. Журавлева, Н.М. Оскорбин,
Г.И. Алгазин, А.С. Маничева**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2023

УДК ~~519.7:519.8(075.8)~~
ББК 22.18я73
~~Ж 911~~

Рецензент: Пышнограй Г.В., профессор, д.ф.-м.н.

Журавлева, Вера Владимировна.
Ж 911 Математические модели и методы исследования систем управления: учебное пособие / В.В. Журавлева, Н. М. Оскорбин., Г. И. Алгазин, А.С. Маничева – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2023.- 80 с.

ISBN 978-5-7904-2758-9

Учебное пособие предназначено для проведения лекций и практических занятий по профильным дисциплинам направления «Прикладная математика и информатика» института математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет». В пособии рассмотрены хорошо известные, апробированные на практике экономико-математические модели и методы исследования систем управления.

Рекомендовано для студентов и аспирантов, изучающих дисциплины, связанные с теорией управления и методами обоснования оптимальных решений в социальных и экономических системах.

ISBN 978-5-7904-2758-9

УДК 519.7:519.8(075.8)
ББК 22.18я73

ВВЕДЕНИЕ

Исследование управления осуществляется в каждодневной деятельности менеджеров и персонала, в работе специализированных аналитических групп, лабораторий, отделов. Необходимость в разработке и исследовании экономико-математических моделей управления продиктовано достаточно большим кругом проблем, с которыми приходится работать многим организациям. От правильного решения этих проблем зависит успех работы этих организаций. Исследования систем управления могут быть различными как по целям, так и по методологии их проведения. Данной проблемой, а также задачами обоснования оптимальных решений занимались на протяжении многих лет как зарубежные, так и русские ученые. Среди них можно выделить Н.Н. Моисеева, В.Н. Буркова, Ф.И. Тарасенко, Н.Б. Мироносецкова, И.М. Бобко, Ф.У. Тейлора, А. Маслоу, А. Файоля и др.

Исследование систем управления – это вид деятельности, направленный на развитие и совершенствование управления в соответствии с постоянно изменяющимися внешними и внутренними условиями. Всю совокупность методов исследования можно разбить на три большие группы: 1) методы, основанные на использовании знаний и интуиции специалистов (экспертные методы); 2) методы формализованного представления систем управления (методы моделирования исследуемых процессов); 3) методы, основанные на интеллектуальном анализе данных. Эффективность исследования систем управления во многом определяется выбранными и использованными методами, которые представляют собой способы, приемы проведения исследований. Их грамотное применение способствует получению достоверных и полных результатов диагностики возникших в системе проблем. Выбор целей и методов исследования, интеграция различных методов определяются знаниями, опытом и интуицией специалистов, проводящих аналитическую работу. В настоящее время в экономике и организации производства применяются практически все группы методов формализованного представления систем [1–3, 11, 15, 17].

Исследование систем управления тесно связано с таким синтетическим разделом прикладной математики, как исследование операций. В процессе исследования операций можно выделить три основных направления, соответствующие этапам [16] научного исследования.

1) *Разработка модели*, то есть формализация изучаемого процесса или явления. Речь идет о построении модели процесса, а не операции. С помощью одной модели могут изучаться разные операции.

2) *Описание операции*. Оперирующая сторона формулирует цель операции, которая также должна быть формализована. Задача исследователя операции – провести необходимый анализ неопределенностей, ограничений и сформулировать в конечном счете некоторую оптимизационную задачу.

3) *Решение оптимизационной задачи*. Строго говоря, только этот этап исследования можно отнести к математике, хотя без участия математика успешное выполнение первых этапов невозможно.

В исследовании операций сложилась определенная терминология. В качестве «модели операции» необходимо представлять некоторую совокупность, состоящую из субъекта (оперирующей стороны), формулирующего цель операции, запаса активных средств (ресурсов) для проведения операции, набора стратегий (способов использования этих ресурсов), и критерия – способа сравнения различных стратегий, преследующих достижение цели операции. Также выделяют понятие «математическая модель операции» – совокупность всех ограничений и условий (критерий не включается в модель). Это значит, что одну и ту же стратегию, одну и ту же реализацию операции можно оценивать разными способами. Понятия критерия и цели управления иногда отождествляют.

Рассмотрим постановку *оптимизационной задачи*. Оптимизационные (экстремальные) модели в различных сферах человеческой деятельности возникают при практической реализации *принципа оптимальности* в управлении. Необходимым условием использования оптимального подхода к планированию и управлению является гибкость ситуаций, в условиях которых приходится принимать решения [1–3, 11, 15, 17]. Суть принципа оптимальности состоит в стремлении выбрать такое управленческое решение, которое наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия управляемого субъекта. Речь идет о выборе некоторого критерия оптимальности – показателя, позволяющего сравнивать эффективность управленческих решений (максимум прибыли, минимум затрат).

Задача в следующей постановке

$$\max(\min) f(X),$$
$$g_i(X) \quad \{\le, =, \ge\} \quad b_i, \quad i = 1,..,m$$
$$X \ge 0$$

является общей *задачей математического* (оптимального) *программирования*, где $X = (x_1, .., x_n)$ – n-мерный вектор переменных.

Областью допустимых решений задачи или ОДР принято называть множество векторов X, удовлетворяющих ограничениям задачи. Вектор X называется *допустимым решением* (планом) задачи, если он удовлетворяет системе ограничений ($X \in$ ОДР). Допустимое решение, которое доставляет максимум (минимум) целевой функции $f(X)$, называется *оптимальным решением* задачи [7, 9, 19].

Иногда по оптимизационной модели невозможно получить решение: область допустимых решений может оказаться пустым множеством или целевая функция является неограниченной на ОДР. Первый случай связан с некорректностями в постановке задачи или разработке математической модели. Например, в задаче о производстве с ограниченными ресурсами имеющимся объемом ресурсов заведомо невозможно выполнить даже те минимальные объемы работ, которые закладываются в ограничения. Если в данной ситуации все же необходимо найти некоторое решение, то следует построить непустое множество допустимых решений, исключив одно или несколько ограничений (принцип альтернативности). Второй случай обычно означает, что модель разработана некорректно и некоторые существенные ограничения в ней отсутствуют.

Исследование сложных систем управления, в том числе иерархических систем и организаций выступает одним из перспективных разделов экономико-математического моделирования. Опыт России в этом отношении является уникальным [2, 11, 12, 15, 17]. Плановая модель экономики, усиленная партийными рычагами, в недалеком прошлом обеспечивала достаточно высокую ее управляемость на всех уровнях. Многие директора современных корпораций до сих пор предпочитают работать по этой модели, поскольку сложность корпоративного управления, необходимость соблюдения интересов участников, механизмы координации решений и их исполнения в рыночных условиях еще далеко не осознаны не только крупным бизнесом, но и государственной властью.

Проблема научно обоснованного построения систем децентрализованного управления, обеспечивающих эффективное и устойчивое функционирование как компании в целом, так и отдельных ее участников, является одной из наиболее актуальных задач теории корпоративного управления. Наиболее распространенным на практике подходом к управлению структурно-сложными иерархическими организациями является подход, основанный на принципе рационального сочетания централизации и децентрализации, расширении прав и ответственности лиц, принимающих управленческие решения по автономно функционирующим структурным подразделениям при одновременном ограничении их свободы выбора на этапе решения задачи стратегического управления [11, 12, 17].

В части 1 учебного пособия [16] подробно рассмотрены базовые понятия теории управляемых систем и их классификация. Отдельно описаны основные методы моделирования технических, человеко-машинных и организационных систем, приведены примеры построения и исследования таких моделей.

В первой главе данного учебного пособия «Построение и исследование оптимизационных моделей на основе методов линейного программирования» рассматриваются различные виды формализации задач линейного программирования (ЗЛП), графический метод и симплекс-метод решения ЗЛП, технология компьютерной реализации оптимизационных моделей с помощью стандартных средств ЭВМ. Рассмотрен пример задачи целочисленного программирования, двойственная ЗЛП, а также анализ ЗЛП на чувствительность к изменениям в правой части ограничений.

Во второй главе пособия «Построение эмпирических моделей систем и процессов» приведена постановка задачи эмпирического моделирования, методы для построения функциональных зависимостей произвольного вида, используемых в оптимизационных моделях – метод наименьших квадратов и метод центра неопределенности, разобрано понятие выброса в эмпирических данных.

В третьей главе «Математические модели планирования производства» рассмотрены математические модели и методы исследования систем управления с многими центрами принятия и реализации решений. Подробно описана модель планирования производства в объединении промышленных предприятий.

В каждом пункте глав приведен демонстрационный пример для лучшего понимания и усвоения теоретического материала.

Авторы учебного пособия надеются, что изложенный материал будет востребован студентами и аспирантами, изучающими дисциплины, связанные с теорией управления, с методами обоснования оптимальных решений в социальных и экономических системах.

Глава 1
ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Задачи линейного программирования. Постановка и примеры

Наиболее изученными среди задач поиска оптимального решения являются задачи линейного программирования (ЗЛП), для которых разработан универсальные методы решения – симплекс-метод и метод внутренней точки. Далее будет приведено матричное описание симплекс-метода.

В общем виде ЗЛП записывается следующим образом [4, 7, 10]: требуется найти максимум (минимум) линейной целевой функции

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \quad \{\le, =, \ge\} \quad b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad \{\le, =, \ge\} \quad b_m, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.3}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины.

Систему ограничений (1.2) называют функциональными ограничениями ЗЛП, а ограничения (1.3) – прямыми.

Любая задача линейного программирования может быть приведена к стандартной форме. С помощью замены переменных можно добиться неотрицательности всех переменных, а ограничение типа равенства следует заменить на два ограничения типа неравенств со «встречными» знаками неравенств.

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме записи:

$$\max f\left(x_1,...,x_n\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\quad i=1,..,m \qquad (1.4)$$

$$x_j\ge 0,\quad j=1,..,n.$$

Среди реальных задач линейного программирования можно выделить похожие по своей математической формализации. Другие задачи можно путем равносильных манипуляций с ограничениями привести к соответствующему виду.

Кроме того, большое множество комбинаторных оптимизационных задач, построенных на графах, успешно сводятся к задачам линейного программирования. Такими, например, являются «задача коммивояжера» и «задача о пропускной способности сети».

Рассмотрим далее некоторые классические примеры ЗЛП, которые существенно отличаются видом ограничений [4, 9, 10, 19]. Так же важным отличием задач является структура переменных. Принято выделять ЗЛП с вектором переменных и с матрицей переменных. В приведенных далее примерах следует обратить внимание на указанные моменты.

Задача о производстве с ограниченными ресурсами

Требуется составить оптимальный план (на некоторый выбранный период времени) производства n видов продукции, если известны стоимости c_j от реализации единицы j-ого вида продукции. Имеется m видов ресурсов (R_1, .., R_m), используемых при производстве, запас которых ограничен величинами b_i. На производство единицы j-ого вида продукции затрачивается a_{ij} единиц i-ого ресурса.

Условие этой задачи можно компактно представить в виде таблицы 1. В качестве переменных модели x_j обозначим количество j-ого вида продукции в плане производства за выбранный период времени. Очевидно, что $x_j \ge 0$.

Неравенство-ограничение для первого ресурса примет вид

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1.$$

Аналогично запишутся неравенства для остальных ресурсов.

Табл. 1 Условия задачи о производстве с ограниченными ресурсами

Вид ресурса	Виды продукции				Лимит ресурса
	1	2	…	n	
R_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
R_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Стоимость ед. продукции	c_1	c_2	…	c_n	

Суммарная прибыль от производства за выбранный период определяется линейной функцией

$$z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

которую требуется максимизировать.

В итоге математическая модель задачи о производстве с ограниченными ресурсами имеет вид:

$$z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad \ldots, \quad x_n \ge 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Особенность полученной ЗЛП в том, что она имеет стандартный вид.

Задача о составлении рациона

В классической формулировке данная задача сформулирована в терминах «животные» + «питательные вещества», хотя легко найти массу других ситуаций, подходящих под описанную ниже модель.

Требуется составить суточный рацион ежедневного питания животного на основе имеющихся видов кормов так, чтобы общая стоимость использованных кормов была минимальной. При этом животное должно получать питательных веществ (например, таких как жиры, углеводы, белки, витамины и т.п.) не менее определенного количества.

Пусть имеется n различных кормов (продуктов) P_1, P_2, ..., P_n и перечень из m необходимых питательных веществ S_1, S_2, ..., S_m. Известна цена c_j единицы веса j-ого корма. Обозначим через a_{ij} содержание i-го питательного вещества в единице j -го корма, через b_i обозначим минимальную суточную потребность животного в i-ом питательном веществе.

В компактной форме условие задачи удобно представляется таблицей вида:

Табл. 2 – Условия задачи о составлении рациона

Питательные вещества	Виды кормов				Суточная потребность
	P_1	P_2	...	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Стоимость 1кг корма	c_1	c_2	...	c_n	

В качестве переменных модели x_j обозначим количество j-ого вида корма в ежедневном рационе. Очевидно, что $x_j \geq 0$.

Неравенство-ограничение для первого вида питательного вещества примет вид

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1.$$

Аналогично запишутся неравенства и для остальных видов питательных веществ. Общие затраты на весь рацион питания можно найти на основе линейной функции

$$z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

которую нужно минимизировать.

В итоге математическая модель задачи составления рациона питания имеет вид:

$$z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m, \\ x_1 \geq 0, \quad \ldots, \quad x_n \geq 0\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

Несмотря на большое сходство с предыдущей задачей, особенность полученной ЗЛП состоит в том, что после приведения к стандартной форме в правой части ограничений будут содержаться отрицательные величины. Соответственно, общий алгоритм решения для такой модели будет содержать больше этапов (это станет очевидным при знакомстве с методами решения ЗЛП).

Задача о раскрое

На «раскрой» поступает s различных материалов. Требуется изготовить из них m различных изделий в количестве, пропорциональном числам b_1, .., b_m. Имеется запас материалов j-ого вида в количестве d_j. Каждая единица j-ого материала может быть раскроена n способами, причем использование i-ого способа дает a_{ik}^j единиц k-х изделий. Найти оптимальный раскрой, при котором число комплектов будет максимально.

Обозначим через x – число комплектов, x_{ij} – количество единиц j-ого материала, раскраиваемых по i-му способу. Очевидно, что переменные x_{ij} – неотрицательны и удовлетворяют ограничениям на запас материалов:

$$x_{1j} + \dots + x_{nj} = d_j, \ j = 1, 2, \dots, s$$

и ограничениям на комплектность

$$\sum_{j=1}^{s} \left(a_{1k}^j x_{1j} + \dots + a_{nk}^j x_{nj} \right) = b_k x, \ \ k = 1, 2, \dots, m.$$

Задача заключается в максимизации $z = x$ при указанных условиях.

Таким образом, математическая модель задачи о раскрое имеет следующий вид

$$z = x \to max,$$

$$x_{1j} + \dots + x_{nj} = d_j, \ \ j = 1, 2, \dots, s,$$

$$\sum_{j=1}^{s} \left(a_{1k}^j x_{1j} + \dots + a_{nk}^j x_{nj} \right) = b_k x, \ \ \ k = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \ \ i = 1, 2, \dots, n, \ \ \ j = 1, 2, \dots, s.$$

Транспортная задача

Предприятие занимается транспортными перевозками однородного груза. Имеется n поставщиков и m потребителей. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю, a_i – запас груза i-го поставщика, b_j – потребность j-го потребителя. Требуется найти оптимальный план перевозок груза, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

Обозначим переменные x_{ij} – объем груза, перевозимого по плану от i-го поставщика к j-му потребителю. Тогда ограничение на потребность в грузе j-го потребителя задается равенством

$$x_{1j} + \dots + x_{nj} = b_j,$$

ограничение на запас груза для i-го поставщика задается равенством

$$x_{i1} + \dots + x_{im} = a_i.$$

Суммарная стоимость перевозок определяется линейной функцией следующего вида:

$$z(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}.$$

В результате математическая модель записывается так:

$$z(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Указанная задача линейного программирования имеет решение только при выполнении условия $\sum a_i = \sum b_j$ (суммарные запасы поставщиков равны суммарной потребности у всех потребителей), а соответствующая транспортная ЗЛП называется транспортной задачей закрытого типа. В случаях невыполнения данного условия (задачи открытого типа) возникают ограничения типа неравенств, тем не менее при решении транспортную задачу принято сводить к описанной выше модели путем введения «фиктивных» поставщиков либо потребителей.

Задача о назначениях

Имеется n видов работ и n исполнителей этих работ (чаще всего исполнитель и работа – термины условные). Известны экономические оценки c_{ij} эффекта от назначения i-го исполнителя на j-й вид работы. Требуется так распределить исполнителей по работам таким образом, чтобы суммарный эффект от назначений был максимальным.

Определим переменные так: $x_{ij} = 1$, если i-го исполнителя следует направить на j-ю работу, $x_{ij} = 0$ в противном случае, $i = 1,..,n,\quad j = 1,..,n$. Тогда математическую модель задачи можно записать в виде:

$$\max f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,..,n, \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,..,n,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j).$$

Смысл ограничений по порядку: на каждую работу должен быть назначен один исполнитель; все исполнители должны получить назначение; ограничение на булевость переменных.

При реализации в Excel последнее ограничение следует записать в виде:

$$\begin{cases} 0 \le x_{ij} \le 1, \\ x_{ij} \in Z, \quad i = 1,..,n, \quad j = 1,..,n. \end{cases}$$

Отметим некоторые особые случаи приведенной задачи.

1. Если некоторое назначение является недопустимым, то соответствующий элемент матрицы назначений $\{c_{ij}\}$ заменяется на число, заведомо меньшее любого другого значения. В ходе решения задачи данного назначения мы сможем избежать автоматически.

2. Если матрица назначений $\{c_{ij}\}$ не является квадратной, то в математической модели задачи о назначениях следует записать либо ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1, \quad i = 1,..,m,$$

т.е. число исполнителей превосходит число работ, либо

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1, \quad j = 1,..,n,$$

т.е. число исполнителей меньше числа работ.

Далее рассмотрим пример составления математической модели для задачи о производстве с ограниченными ресурсами, имеющей дополнительное ограничение.

Пример 1. Разработать математическую модель задачи линейного программирования. Определить оптимальное сочетание посевов сельскохозяйственных культур в фермерском хозяйстве так, чтобы получить максимальное количество товарной продукции в денежном выражении. Площадь пашни в хозяйстве составляет 6250 га, затраты ручного труда – 76250 ч.-ч., затраты механизированного труда – 9600 ч.-дн. Производство пшеницы должно составлять не менее 10000 ц. Площадь сахарной свеклы в структуре пашни должна быть не более 10%.

Табл. 3 – Данные к примеру 1

Показатели	пшеница	свекла	картофель	овощи
Урожайность, ц/га	13,4	185	110	230
Затраты труда, ч-ч/ц	0,8	3,4	3,5	3,7
Затраты механ. труда, ч-дн/га	9,6	32,4	17,4	17,9
Цена реализации, руб./ц.	230	320	470	490

Решение

Введем обозначения: x_1, x_2, x_3, x_4 – плановая площадь посевов соответственно пшеницы, сахарной свеклы, картофеля и овощей.

Необходимо максимизировать функцию цели:

$$F(X) = 230 \cdot 13{,}4 \cdot x_1 + 320 \cdot 185 \cdot x_2 + 470 \cdot 110 \cdot x_3 + 490 \cdot 230 \cdot x_4.$$

По условию задачи должны выполняться следующие ограничения.

1) Ограничение на неотрицательность переменных: $x_j \geq 0$.

2) Ограничение по размеру площади пашни:

$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \leq 6250$ (га)

3) Ограничение на затраты ручного труда:

$0{,}8 \cdot 13{,}4 \cdot x_1 + 3{,}4 \cdot 185 \cdot x_2 + 3{,}5 \cdot 110 \cdot x_3 + 3{,}7 \cdot 230 \cdot x_4 \leq 76250$ (ч.-ч.).

4) Ограничение на затраты механизированного труда:

$9{,}6 \cdot x_1 + 32{,}4 \cdot x_2 + 17{,}4 \cdot x_3 + 17{,}9 \cdot x_4 \leq 9600$ (ч.-дн.)

5) Ограничение на производство пшеницы:

$13{,}4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \geq 10000$ (ц.)

6) Ограничение на площадь посева свеклы:

$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \leq 0{,}1 \cdot 6250$ (га)

Итак, в числовой форме имеем следующую ЗЛП (в стандартной форме записи):

$$\max F = 3082x_1 + 59200x_2 + 51700x_3 + 112700x_4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6250,$$

$$10{,}72x_1 + 629x_2 + 385x_3 + 851x_4 \leq 76250,$$

$$9{,}6x_1 + 32{,}4x_2 + 17{,}4x_3 + 17{,}9x_4 \leq 9600,$$

$$-13{,}4x_1 \leq -10000,$$

$$x_2 \leq 625,$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,..,4).$$

1.2. Задачи линейного программирования. Графический метод решения

Для понимания идей, лежащих в основе симплексного метода и теории двойственности, имеет смысл подробно рассмотреть графический метод решения ЗЛП в случае двух и трех переменных [4, 7, 10, 19].

Положим в задаче (1.4) размерность пространства возможных решений $n = 2$, т.е. рассмотрим задачу линейного программирования на плоскости:

$$extr \quad f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Пусть система неравенств (1.8) совместна. Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$. Условия неотрицательности определяют полуплоскости с граничными прямыми $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ соответственно. В случае совместной системы ограничений пересечение этих полуплоскостей не пустое и образует выпуклое множество (как пересечение выпуклых областей) – совокупность точек, координаты каждой из которых являются решением системы (1.8). Это множество называют *многоугольником решений*. Фактически он может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, неограниченной многоугольной областью.

Если в системе ограничений задачи (1.4) $n = 3$, то каждое неравенство геометрически представляет собой полупространство трехмерного пространства, граничная плоскость которого есть $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$. В случае $n > 3$ каждое неравенство представляет собой полупространство n-мерного пространства, границы которых – гиперплоскости. Если система ограничений совместна (при $n \ge 3$), то пересечение всех полупространств образует область, называемую *многогранником решений*.

Итак, геометрически решение задачи линейного программирования представляет собой процедуру отыскания такой точки многогранника решений, координаты которой доставляют линейной функции цели максимальное (минимальное) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многогранника решений.

Утверждение: Если целевая функция ЗЛП ограничена на многограннике (многоугольнике) решений, то существует такая угловая (крайняя) точка многогранника решений, в которой целевая функция достигает своего оптимума [7].

При решении ЗЛП для практических целей достаточно исследовать вершины многогранника решений – угловые точки ОДР. На указанном утверждении основан простейший графический метод решения ЗЛП – *метод полного перебора*.

При большом количестве ограничений или в случае размерности $n \geq 3$ целесообразно использовать *градиентный графический метод*. Суть его состоит в выполнении двух этапов поиска оптимального решения.

1 ЭТАП. Построение ОДР.

2 ЭТАП. Нахождение оптимальной точки ОДР с использованием вектора-градиента.

На втором этапе строится вектор-градиент целевой функции и линия уровня целевой функции $f(X) = \text{const}$, проходящая через ОДР. Затем при выполнении второго этапа следует руководствоваться правилом: при параллельном переносе линии уровня в направлении градиента крайняя точка ОДР является точкой максимума, в направлении антиградиента – точкой минимума.

Дополнительно заметим следующее: так как «построенная на бумаге» ОДР не может рассматриваться как точная из-за погрешностей рисования, то результатом второго этапа будет определение оптимальной точки как пересечения некоторых граничных прямых. Далее координаты этой точки можно найти из соответствующей системы линейных уравнений.

ЗЛП не имеет решения в тех случаях, когда: 1) ОДР – пустое множество, т.е. при несовместности системы ограничений; 2) ОДР представляет собой неограниченную многогранную область, при этом целевая функция не ограничена сверху (при максимизации) или снизу (при минимизации).

Если линия уровня целевой функции при своем прохождении через ОДР не покидает многогранника решений, то соответствующий оптимум целевой функции не существует.

Если линия уровня параллельна граничной линии какого-либо функционального ограничения ЗЛП, то оптимальное значение будет достигаться в любой точке отрезка, лежащего между двумя оптимальными угловыми точками, и соответственно любая из этих точек является оптимальным решением ЗЛП.

Пример 2. Используя градиентный графический метод, найти максимальное и минимальное значения целевой функции при ограничениях:

$$F(X) = 3x_1 + 3x_2,$$

$$x_1 - 2x_2 \le 2,$$

$$-2x_1 + x_2 \le 6,$$

$$2x_1 + x_2 \ge 6,$$

$$x_1 + 2x_2 \ge 6,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение

Строим область допустимых решений (ОДР) задачи. Изображаем на координатной плоскости прямые: $x_1 - 2x_2 = 2$, $-2x_1 + x_2 = 6$, $2x_1 + x_2 = 6$, $x_1 + 2x_2 = 6$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Определим полуплоскости, которые задаются соответствующими неравенствами из системы ограничений, и на их пересечении получим ОДР – неограниченный кверху и вправо многоугольник с вершинами А, В, С (рисунок 1).

Затем строим линию уровня целевой функции $F(X) = 0$, т.е. прямую $3x_1 + 3x_2 = 0$. С целью определения направления движения к оптимуму построим вектор-градиент $\vec{n} = (3, 3)$. При максимизации целевой функции перемещаем линию уровня в направлении вектора-градиента, при минимизации – в противоположном. Тогда предельные точки ОДР дают соответствующий оптимум.

Очевидно, что минимум целевой функции данной задачи достигается в точке В. Найдем координаты В, учтя, что это точка пересечения двух прямых:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Отсюда находим: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, т.е. B(2, 2). Тогда $F_{\min} = Z(2,2) = 3\cdot2 + 3\cdot2 = 12$. Так как в направлении вектора-градиента ОДР неограниченная, то максимума нет.

ОТВЕТ: $F_{\min} = 12$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 2$; максимума нет.

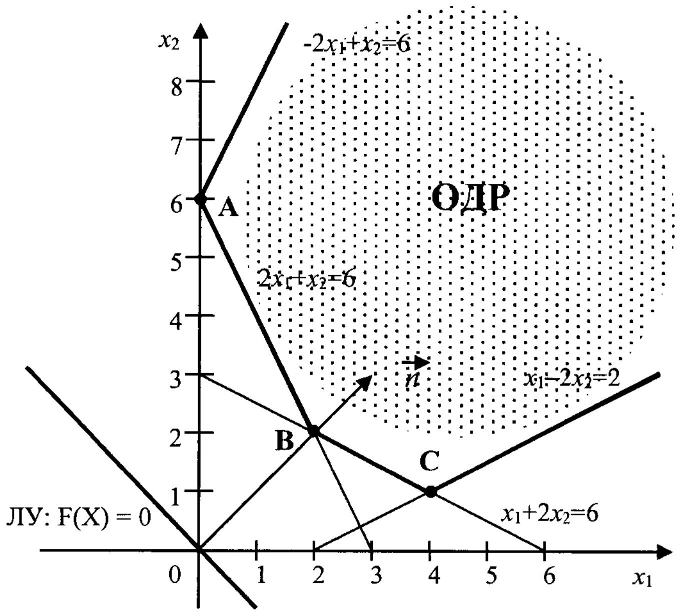


Рис. 1 – Построение области допустимых решений (ОДР) и поиск оптимума ЦФ

1.3. Задачи линейного программирования. Технология решения в Excel

Рассмотрим технологию компьютерной реализации оптимизационных моделей [7]. Пакет MS Excel содержит надстройку *Поиск решения*, позволяющую решать модели линейной, нелинейной и дискретной оптимизации.

Первым шагом при работе с *Поиском решения* является создание специализированного рабочего листа, то есть запись математической модели в терминах Excel (рисунок 2).

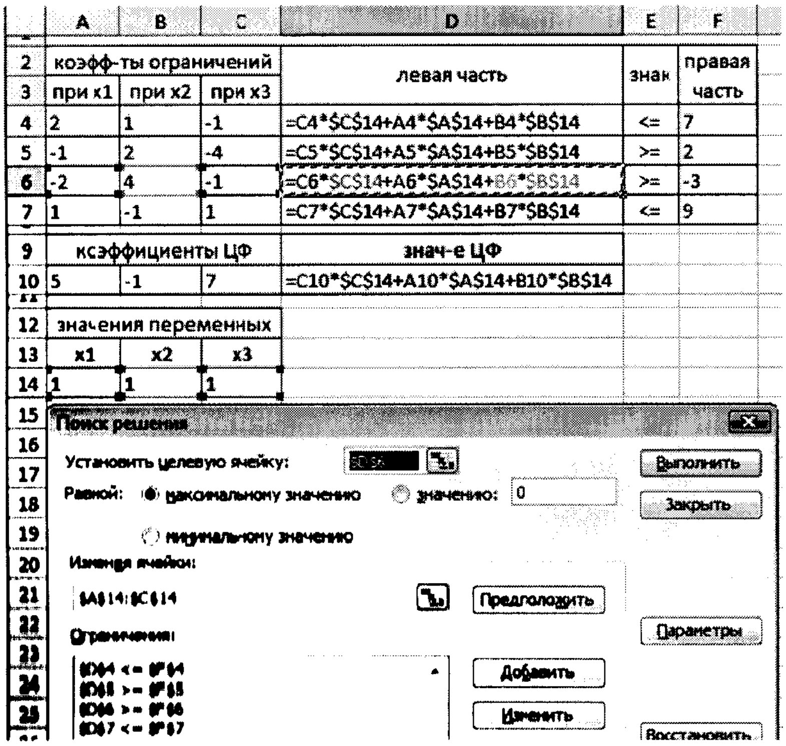


Рис. 2 – Пример записи модели ЗЛП в Excel

Далее необходимо указать в специальном окне диалога целевую ячейку, в которой в виде формулы записана целевая функция задачи, а также одну или несколько изменяемых ячеек (переменных), которые, как правило, отвечают управляющим переменным в модели. Для успешного поиска решения необходимо, чтобы каждая из переменных ячеек (их можно задать до двухсот) влияла на целевую ячейку (формула в целевой ячейке должна опираться в вычислениях на значения переменных ячеек).

Ограничения модели определяются с помощью значений соответствующих ячеек, которые должны находиться в определенных пределах или удовлетворять граничным условиям. Ограничения могут налагаться как на переменные ячейки, так и на целевую ячейку. Таким образом, на специализированном рабочем листе должны содержаться ячейки, в которых вычисляются ограничиваемые величины. Тип каждого ограничения (≤, =, ≥) вводится в окне диалога *Изменение ограничения* надстройки *Поиск решения* (рисунок 3). Там же можно ввести численные значения правых частей ограничений, либо ссылки на ячейки, их содержащие.

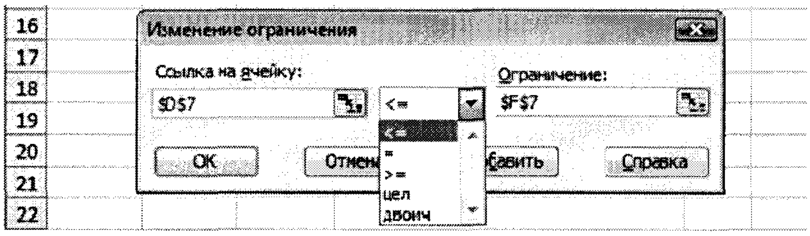


Рис. 3 – Пример записи ограничений

Затем необходимо указать параметры модели, в том числе *Линейная модель* (если решается ЗЛП) и *Неотрицательные значения* (прямые ограничения на неотрицательность переменных не нужно приводить в списке ограничений).

После команды *Выполнить* осуществляется поиск оптимального решения: в итоге появляется диалоговое окно *Результаты поиска решения*. В случае несовместности системы ограничений будет выдаваться сообщение «*Поиск не может найти подходящего решения*». Если же решение задачи отсутствует вследствие неограниченности целевой функции на ОДР, то будет выдаваться сообщение «*Значения целевой ячейки не сходятся*». При успешном завершении решения задачи появляется сообщение «*Решение найдено. Все ограничения выполнены*». С помощью рубрики *Результаты* диалогового окна *Результаты поиска решения* можно получить отчет по результатам решения.

Пример 3. Пять сотрудников фирмы способны выполнить пять заданий. Как следует распределить людей по заданиям, чтобы минимизировать суммарное время выполнения всех заданий? Время выполнения (в часах) приведено в таблице 8.

Табл. 8. Исходные данные для примера 3

Сотрудники	Время на выполнение заданий				
	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5
Иван	10	5	9	18	11
Федор	13	19	6	12	14
Ксения	3	2	4	4	5
Кристина	18	9	12	17	15
Макар	11	6	14	19	10

Решение

Пусть $x_{ij} = 1$, если i-го исполнителя следует направить на j-ю работу, $x_{ij} = 0$ в противном случае.

Математическую модель задачи можно записать в виде:

$$\max f(X) = 10x_{11} + 5x_{12} + 9x_{13} + 18x_{14} + 11x_{15} + 13x_{21} + 19x_{22} + 6x_{23} +$$
$$+12x_{24} + 14x_{25} + 3x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34} + 5x_{35} + 18x_{41} + 9x_{42} +$$
$$+12x_{43} + 17x_{44} + 15x_{45} + 11x_{51} + 6x_{52} + 14x_{53} + 19x_{54} + 10x_{55},$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad j = 1,..,5,$$
$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad i = 1,..,5,$$
$$0 \le x_{ij} \le 1, \quad x_{ij} \in Z.$$

Перепишем условия на рабочем листе Excel в виде таблицы (рисунок 4), где значения соответствующих сумм (G10:G14 и B15:F15) и целевой функции (B17) вычисляем с помощью формул. Найдем решение задачи с помощью надстройки *Поиск решения* (рисунок 5).

В результате получим следующие значения: $x_{11} = x_{42} = x_{23} = x_{34} = x_{55} = 1$, остальные $x_{ij} = 0$.

В итоге получим следующий ответ к задаче: задание Z1 следует поручить Ивану, Z2 – Кристине, Z3 – Федору, Z4 – Ксении, Z5 – Макару. Суммарное время выполнения всех заданий составит 39 ч.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Сотруд-	Задания					
2	ники	Z-1	Z-2	Z-3	Z-4	Z-5	
3	Иван	10	5	9	18	11	
4	Федор	13	19	6	12	14	
5	Ксения	3	2	4	4	5	
6	Кристина	18	9	12	17	15	
7	Макар	11	6	14	19	10	
8							
9	*i\j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	сумма
10	*1*	1	0	0	0	0	1
11	*2*	0	1	0	0	0	1
12	*3*	0	0	1	0	0	1
13	*4*	0	0	0	1	0	1
14	*5*	0	0	0	0	1	1
15	сумма	1	1	1	1	1	
17	**f(X)=**	**60**					

Рис. 4 – Решение задачи о назначениях

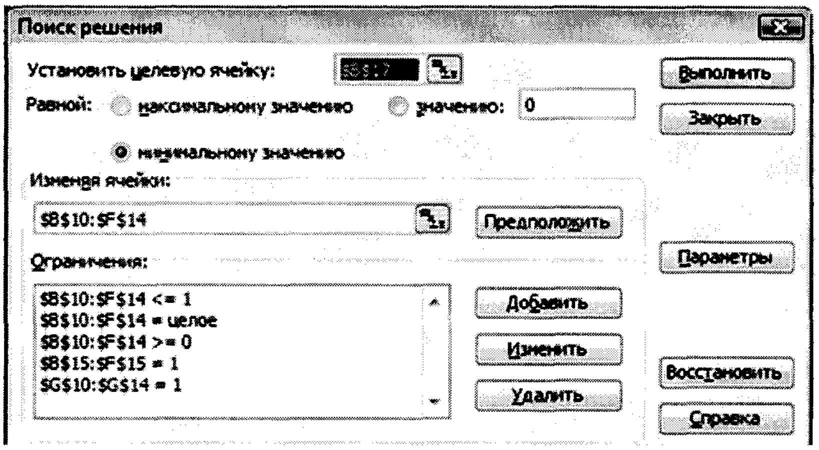


Рис. 5 – Поиск решения задачи о назначениях

1.4. Симплекс-метод

Речь идет об универсальном алгоритме решения ЗЛП. При геометрической интерпретации можно определить его как метод целенаправленного перебора вершин выпуклого многогранника решений, причем направление «движения» задается компонентами вектора-градиента. В симплекс-методе модно выделить следующие этапы [4, 9, 10, 19]:

ЭТАП 0. Приведение ЗЛП к каноническому виду.

ЭТАП 1. Нахождение опорной вершины ОДР (удовлетворяющей условию неотрицательности).

ЭТАП 2. Итеративный переход от некоторой вершины многогранника решений к соседней, приводящий к оптимизации целевой функции.

Этап 0 и этап 1 при некоторых обстоятельствах могут отсутствовать. Этап 2 является основным. При наличии в алгоритме 1 и 2 этапа симплекс-метод называют *двухэтапным*, при наличии только 2 этапа – *одноэтапным симплекс-методом.*

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме с неотрицательной правой частью

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \\ &\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = B, B \geq 0 \\ &x_i \geq 0, i = 1,\dots,n \end{aligned} \tag{1.9}$$

где A_i, B – m-мерные векторы-столбцы ($m \leq n$). Решение задачи будем искать среди неотрицательных базисных решений системы уравнений $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = B$.

Пусть K – произвольное m-элементное подмножество множества $\{1,2,\dots,n\}$. Введем матрицу $A = (A_i, i \in \text{K})$ и вектор

$\bar{x} = (\bar{x}_i \ , i \in \mathrm{K}) \in R^m$, такой что $\bar{x} = A^{-1}B$. Тогда *базисным решением* системы линейных уравнений $\sum_{i=1}^{n} A_i \, x_i = B$ называется вектор $x_\delta \in R^n$ с компонентами

$$x_{\delta i} = \begin{cases} 0 \ , \text{ если } i \notin \mathrm{K}, \\ \bar{x}_i \ , \text{ если } i \in \mathrm{K}, \end{cases} \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Далее в описании используются следующие названия: K – базисное множество (число различных таких множеств равно числу сочетаний из n по m элементов), A – базисная $(m \times m)$ матрица; $\bar{x}$ – вектор *базисных переменных*; нулевые переменные в решении x_δ называются *свободными переменными* [12].

Если $\bar{x} \geq 0$, то решение x_δ называется неотрицательным базисным решением. Оно удовлетворяет системе ограничений ЗЛП. Доказано, что рассматриваемая задача среди своих решений, если они существуют, содержит неотрицательные базисные решения. Отсюда следует, в частности, метод решения задач ЛП путем полного перебора базисных решений. Симплекс-метод – это метод решения задач линейного программирования путем направленного перебора неотрицательных базисных решений, причем на получаемой последовательности $\{x_\delta^1,\ldots,x_\delta^N\}$ значение целевой функции (в невырожденном случае) строго возрастает [12].

Алгоритм симплекс-метода

Шаг 1 (запуск алгоритма). Находим невырожденное допустимое базисное решение и соответствующее базисное множество K^1. Примем $v = 1$ – номер итерации.

Шаг 2. Находим $\bar{x}^v = (A^v)^{-1}B$; $g_i^v = (A^v)^{-1}A_i$, $i \notin \mathrm{K}^v$;

$$\Delta_i = \begin{cases} \bar{c}^v (A^v)^{-1} A_i - c_i \, , & i \notin \mathrm{K}^v; \\ 0 & \forall i \in \mathrm{K}^v. \end{cases}$$

Если $\Delta_i \geq 0, i = \overline{1,n}$, то x_δ^v – искомое решение задачи ЛП (1.9).

Шаг 3. Находим номера s и r:

$$s = Arg\ \min\{\Delta_i \mid i = \overline{1,n}\},\quad r = Arg\ \min\left\{\frac{\overline{x}_i^v}{g_{is}^v} \mid g_{is}^v > 0; i \in \mathrm{K}^v\right\},$$

где g_{is}^v – i-я компонента вектора g_s^v.

Далее находим новое базисное множество $\mathrm{K}^{v+1} = \mathrm{K}^v \setminus \{r\} \bigcup \{s\}$, примем $v = v+1$, идем к шагу 2.

В описанном алгоритме приняты следующие обозначения:

$$A^v = (A_i, i \in \mathrm{K}^v);\quad \overline{c}^v = (c_i, i \in \mathrm{K}^v).$$

Величина Δ_i называется *характеристической разностью*, а вектор $y = \overline{c}^v (A^v)^{-1}$ – *вектор двойственных переменных.*

Укажем некоторые способы нахождения начального базисного множества K^1 для задачи ЛП в стандартной форме

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \\ &\sum_{i=1}^{n} A_i x_i \le B, B \ge 0 \\ &x_i \ge 0,\quad i = 1,\dots,n. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Введем вектор переменных y по следующему правилу:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + E_m y = B, \tag{1.11}$$

где $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_m \end{pmatrix} \ge 0$, причем переменные у играют важную роль в анализе решений задачи линейного программирования (далее они будут упоминаться как двойственные оценки ограничений),

$$E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица порядка m.

Для единообразия записи обозначим

$A_{n+1} = I_1 ;...; A_{n+m} = I_m$ – единичные столбцы из матрицы E_m;

$$x_{n+1} = y_1 ;...; x_{n+m} = y_m ;$$
$$c_{n+1} = ... = c_{n+m} = 0.$$

Тогда получим следующую каноническую форму задачи ЛП, эквивалентную рассматриваемой задаче:

$$\sum_{i=1}^{n+m} c_i x_i \to \max$$
$$\sum_{i=1}^{n+m} A_i x_i = B, B \geq 0, \qquad (1.12)$$
$$x_i \geq 0, i = 1,...,n+m.$$

В описанном случае начальное базисное решение легко получается в следующем виде

$$x_\delta^1 = (0,,...,0, b_1, b_2,..., b_m); \quad \mathrm{K}^1 = \{n+1;...;n+m\}, \quad (1.13)$$

где b_j – компоненты вектора B.

Для ЗЛП, изначально записанной в канонической форме (1.9), используется *метод искусственного базиса*, описание которого можно найти в [9, 10].

Следует также отметить случай ЗЛП для вектора правой части, не удовлетворяющего условию неотрицательности ($B \geq 0$). В этом случае применяется *двухэтапный симплекс-метод*.

В описанном выше виде симплекс-метод удобен для реализации в виде программного кода. Для «ручных» расчетов по ЗЛП малого размера чаще всего рекомендуется использовать *симплекс-таблицы* и правило пересчета симплекс-таблиц, именуемое правилом прямоугольника. Расчет, проводимый на основе симплекс-таблиц предполагает оперирование всеми данными ЗЛП, полученными на предыдущей итерации, и отличается от приведенного алгоритма, в котором на определенной итерации необходимо знание лишь базисных столбцов матрицы ограничений (причем на каждой итерации данные берутся из матрицы исходной задачи). Тем не менее шаг 3 описанного алгоритма совпадает с аналогичным в «ручном» симплекс-методе, где номера s и r называют номером разрешающего столбца и номером разрешающей строки.

Пример 4. При помощи описанного алгоритма симплекс-метода решить ЗЛП

$$F(X) = 30x_1 + 60x_2 \to max$$

$$x_1 + 3x_2 \le 21,$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 21,$$

$$3x_1 + x_2 \le 18,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение

Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5 (этап 0):

$$F(X) = 30x_1 + 60x_2 \to max$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad = 21,$$

$$3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \qquad = 21,$$

$$3x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 18,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Поскольку правые части системы ограничений неотрицательны, то задача имеет канонический вид, т.е. приведена к записи, обозначенной формулами (1.9).

Шаг 1 (запуск). Невырожденное допустимое базисное решение $x_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 21 & 21 & 18 \end{pmatrix}$ и соответствующее базисное множество $K^1 = \{3, 4, 5\}$.

Полагаем $v = 1$ – номер итерации.

Шаг 2. Находим $A^{v=1}=(A^{v})^{-1}=E$, $\bar{x}^{v=1}=\begin{pmatrix}\bar{x}_3\\ \bar{x}_4\\ \bar{x}_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\ 21\\ 18\end{pmatrix}$,

$$g_1^{v=1}=E\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 3\end{pmatrix},\ g_2^{v=1}=E\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix},\ \bar{c}^{v=1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\Delta_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}E\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 3\end{pmatrix}-30=-30,$$

$$\Delta_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}E\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}-60=-60.$$

Поскольку есть $\Delta_i<0$, то искомое решение задачи не найдено.

Шаг 3. Находим номера s и r:

$s=Arg\ \min\{-30;-60;0;0;0\}=2$;

$$g_{s=2}^{v=1}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix};\ r=Arg\ \min\left\{\frac{21}{3};\frac{21}{2};\frac{18}{1}\right\}=Arg\ \min\{7;10,5;18\}=3.$$

Далее находим новое базисное множество K^2 = {2, 4, 5}, примем $v=2$, идем к шагу 2.

Шаг 2. Находим $A^{v=2}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $(A^{v=2})^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 0\\ -2/3 & 1 & 0\\ -1/3 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

$$\bar{x}^{v=2}=\begin{pmatrix}\bar{x}_2\\ \bar{x}_4\\ \bar{x}_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 0\\ -2/3 & 1 & 0\\ -1/3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}21\\ 21\\ 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 7\\ 11\end{pmatrix},$$

$$g_1^{v=2} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \\ 8/3 \end{pmatrix},$$

$$g_3^{v=2} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},$$

$$c^{v=2} = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 30 = -10,$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 20.$$

Поскольку есть $\Lambda_i < 0$, то искомое решение задачи не найдено.

Шаг 3. Находим номера s и r: $s = Arg\ \min\{-10; 0; 20; 0; 0\} = 1$;

$$g_{s-1}^{v=2} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \\ 8/3 \end{pmatrix};\ r = Arg\ \min\{21; 3; 33/8\} = 3.$$

Новое базисное множество $K^3 = \{2, 1, 5\}$, примем $v = 3$.

Шаг 2. Находим $A^{v=3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $(A^{v=3})^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 & 0 \\ -2/7 & 3/7 & 0 \\ 3/7 & -8/7 & 1 \end{pmatrix}$,

$$g_3^{v=3} = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 & 0 \\ -2/7 & 3/7 & 0 \\ 3/7 & -8/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix},$$

$$g_4^{\nu=3}=\begin{pmatrix}3/7 & -1/7 & 0\\ -2/7 & 3/7 & 0\\ 3/7 & -8/7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/7\\3/7\\-8/7\end{pmatrix},$$

$$\bar{c}^{\nu=3}=(60 \quad 30 \quad 0);$$

$$\Delta_3=(60 \quad 30 \quad 0)\begin{pmatrix}3/7 & -1/7 & 0\\ -2/7 & 3/7 & 0\\ 3/7 & -8/7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-0=120/7,$$

$$\Delta_4=(60 \quad 30 \quad 0)\begin{pmatrix}3/7 & -1/7 & 0\\ -2/7 & 3/7 & 0\\ 3/7 & -8/7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-0=30/7.$$

Поскольку все $\Delta_i \geq 0$, то искомое решение задачи найдено.

ОТВЕТ: $X^* = (3, 6, 0, 0, 3)$.

1.5. Задачи целочисленного программирования

Наряду с непрерывными задачами линейного программирования на практике приходится решать и дискретные ЗЛП. Это задачи, на решение которых наложено дополнительное условие целочисленности (например, переменные – это количество произведенных изделий некоторого вида). Их называют задачами целочисленного программирования [4, 7, 8, 10]. Для решения таких задач обычно используется метод ветвей и границ. Именно он реализован в надстройке *Поиск решения* пакета Excel.

Достаточно часто при моделировании систем и процессов используется особый случай дискретности – булевость переменных, т.е. переменные могут принимать значения 0 или 1. Примерами этого случая являются транспортная задача и задача о назначениях, постановка которых описана в пункте 1.1.

Метод ветвей и границ

Рассмотрим задачу, состоящую в определении максимального значения функции F при условиях [7]:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1,..,m \\ x_j \ge 0, & j = 1,..,n, \end{cases} \tag{1.15}$$

$$x_j \in Z \quad j = 1,..,n. \tag{1.16}$$

Первоначально находим симплекс-методом оптимальный план задачи без учета целочисленности переменных. Пусть им является план X_0. Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то тем самым найдено искомое решение задачи и $F_{max} = F(X_0)$.

Если же среди компонент плана X_0 имеются дробные числа, то X_0 не удовлетворяет условию целочисленности и необходимо осуществить упорядоченный переход к новым планам, пока не будет найдено оптимальное решение задачи.

Отметим, что при использовании метода ветвей и границ выполняется условие $F(X_0) \ge F(X)$ для всякого последующего плана X, именно это обстоятельство позволяет существенно ограничить процесс поиска оптимального целочисленного решения.

Предполагаем, что найденный план X_0 не удовлетворяет условию целочисленности. Пусть, например, переменная x_{j0} приняла в плане X_0 дробное значение. Тогда в оптимальном целочисленном плане её значение будет либо меньше или равно ближайшему меньшему целому числу K_0, либо больше или равно ближайшему большему целому числу K_0+1. Составляем две ЗЛП:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\text{(I)} \begin{cases} x_{i_0} \le K_0, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1,..,m, \\ x_j \ge 0, & j = 1,..,n; \end{cases}$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\text{(II)} \begin{cases} x_{i_0} \ge K_0 + 1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1,..,m, \\ x_j \ge 0, & j = 1,..,n; \end{cases}$$

Далее ищется симплекс-методом решение ЗЛП (I) и (II).

Очевидно, что возможен один из следующих исходов:

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда указанный план и соответствующее значение целевой функции на нём и дают решение исходной задачи.

2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет оптимальный план, среди компонент которого есть дробные числа. Тогда рассматриваем вторую задачу и в ее оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу, и строим две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).

3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане второй задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значение целевой функции на этих планах и сравниваем их между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и он вместе со значением целевой функции на нем дает искомое решение.

Если же значение целевой функции больше на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то следует взять одно из таких чисел и для задачи, план которой рассматривается, необходимо построить две задачи, аналогичные (I) и (II).

4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда выделяем значение целевой функции на данных оптимальных планах и рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. В оптимальном плане этой задачи выбираем одну из компонент, значение которой является дробным числом, и строим две задачи, аналогичные (I) и (II).

Таким образом, описанный выше итерационный процесс может быть представлен в виде некоторого дерева, на котором исходная вершина отвечает оптимальному плану X_0 задачи (1.14), а каждая соединенная с ней ветвью вершина отвечает оптимальным планам задач (I) и (II). Каждая из этих вершин имеет свои ветвления. При этом на каждом шаге выбирается та вершина, для которой значение является наибольшим. Если на некотором шаге будет получен план, имеющий целочисленные компоненты, и значение функции на нем окажется больше или равно, чем значение функции в других возможных для ветвления вершинах, то данный план является оптимальным планом исходной задачи целочисленного программирования и, соответственно, значение целевой функции на нем является максимальным (описанная схема приведена далее для конкретного примера решения целочисленной ЗЛП).

Итак, процесс нахождения решения задачи целочисленного программирования (1.14)–(1.16) методом ветвей и границ включает следующие шаги:

Шаг 1) Находится решение ЗЛП (1.14)–(1.15).

Щаг 2) Составляются дополнительные ограничения для одной из переменных, значение которой в оптимальном плане задачи (1.14)–(1.15) является дробным числом.

Шаг 3) Находятся решения задач (I) и (II), которые получаются из задачи (1.14)–(1.15) в результате присоединения дополнительных ограничений.

Шаг 4) В случае необходимости составляются дополнительные ограничения для переменной, значение которой является дробным, формулируют задачи, аналогичные задачам (I) и (II), и находят их решение. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет найдена вершина, соответствующая целочисленному плану задачи (1.14)–(1.15) и такая, что значение в этой вершине больше или равно значению функции в других возможных для ветвления вершинах.

Пример 5. Методом ветвей и границ найти решение задачи:

$$\max F = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 3x_1 - 3x_2 \le 9, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in Z.$$

Решение

Изначально находим решение сформулированной задачи без учета условия целочисленности. Получаем оптимальный план $X_0 = (18/5, 3/5)$ и значение ЦФ $F(X_0) = 39/5$.

Так как в плане X_0 значения переменных дробные, то X_0 не является оптимальным планом исходной задачи. Выберем переменную, значение которой дробно, например x_1. Тогда эта переменная в оптимальном плане исходной задачи будет принимать значение $x_1 \le 3$, либо $x_1 \ge 4$.

Рассмотрим две задачи линейного программирования:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max, \qquad\qquad F = 2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 3x_1 - 3x_2 \le 9, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \le 3, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2; \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 3x_1 - 3x_2 \le 9, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2. \end{cases}$$

Задача (I) имеет оптимальный план $X_1^{(I)} = (3, 3/2)$, значение ЦФ $F(X_1^{(I)}) = 15/2$.

Задача (II) неразрешима.

Исследуем задачу (I). Так как среди компонент оптимального плана есть дробные числа, то для одной из переменных, например x_2, вводим дополнительные ограничения: $x_2 \le 1$, $x_2 \ge 2$.

Рассмотрим далее следующие две задачи:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max, \qquad\qquad F = 2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$(\mathrm{III}) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 3x_1 - 3x_2 \le 9, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2; \end{cases} \qquad (\mathrm{IV}) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 3x_1 - 3x_2 \le 9, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2. \end{cases}$$

Задача (IV) неразрешима, а задача (III) имеет оптимальный план $X_2^{(III)} = (3, 1)$, на котором значение ЦФ $F(X_2^{(III)}) = 7$.

Таким образом, исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $X^* = (3, 1)$. При этом плане целевая функция принимает максимальное значение $F_{max} = 7$.

Схему реализованного выше вычислительного процесса можно представить в виде дерева, ветвями которого являются соответствующие ограничения на переменные, а вершинами – решения соответствующих ЗЛП.

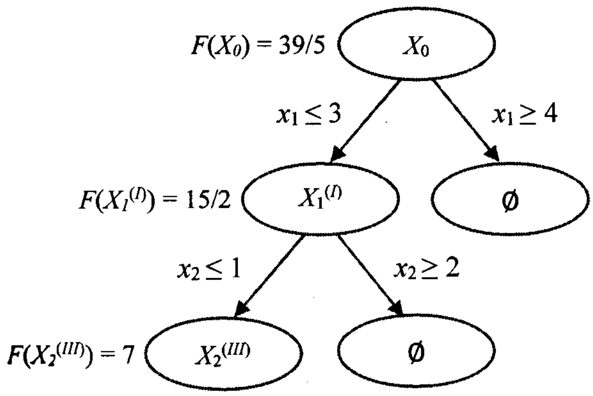


Рис. 6 – Дерево решения целочисленной ЗЛП

1.6. Элементы теории двойственности

Перейдем к рассмотрению специальных методов проведения анализа оптимального плана – *теории двойственности* [7, 19].

С каждой задачей линейного программирования определенным образом связана другая ЗЛП, называемая *двойственной* к исходной задаче. Связь их заключается, в частности в том, что оптимальное решение одной из них может быть найдено непосредственно из оптимального решения другой. Имея решение двойственной задачи, которое интерпретируется как совокупность двойственных (условных) оценок ресурсов, можно провести анализ оптимального плана исходной задачи и сделать ряд содержательных выводов.

Правило построения двойственной ЗЛП определяется так:

Исходная задача	*Двойственная задача*	
$\max f(X)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j,$	$\min \varphi(Y)=\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i,$	
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,..,.m_1,$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j=1,..,.n_1,$	(1.17)
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=m_1+1,..,.m,$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \quad j=n_1+1,..,.n,$	
$x_j \ge 0, \quad j=1,..,n_1, \quad (n_1 \le n)$	$y_i \ge 0, \quad i=1,..,m_1, \quad (m_1 \le m).$	

Эти задачи называют взаимно двойственными [7, 19]. В качестве исходной задачи в приведенной паре взаимно двойственных задач можно принимать и указанную задачу на минимум.

При составлении двойственной задачи для некоторой исходной ЗЛП, необходимо, прежде всего привести систему ограничений исходной задачи к стандартному виду. Затем следует обратить внимание на соответствие: переменные исходной задачи соответствуют ограничениям двойственной, и, наоборот, переменные двойственной задачи соответствуют ограничениям исходной ЗЛП.

Связь между оптимальными планами пары двойственных задач устанавливают следующие две базовые теоремы [7, 19].

Теорема 1 (основная теорема двойственности). Если одна из двойственных задач разрешима, то разрешима и другая, причем экстремальные значения целевых функций этих задач равны:

$$\max f(X)=f\left(X^*\right)=\min \varphi(Y)=\varphi\left(Y^*\right) \tag{1.18}$$

Если одна из двойственных задач неразрешима, то неразрешима и другая.

Теорема 2 (теорема о дополняющей нежесткости). Если при подстановке компонент оптимального плана исходной задачи в систему ограничений i-е ограничение обращается в неравенство, то i-я компонента оптимального плана двойственной задачи равна нулю. Если i-я компонента оптимального плана двойственной задачи положительна, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется ее оптимальным решением как строгое равенство. То есть для оптимальных планов двойственных задач имеет место система равенств:

$$\begin{cases} x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, & j = 1,..,n, \\ y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, & i = 1,..,m. \end{cases} \tag{1.19}$$

Пример 6. Записать двойственную задачу к следующей ЗЛП:

$$\max f(X) = x_1 - x_2 + 5x_3,$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \le 15,$$
$$2x_2 - 3x_3 \ge 10,$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение

Для использования правила построения двойственной задачи умножим обе части второго неравенства на – 1. Получим исходную задачу в стандартном виде:

$$\max f(X) = x_1 - x_2 + 5x_3,$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \le 15,$$
$$-2x_2 + 3x_3 \le -10,$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Тогда двойственная к ней задача примет вид:

$$\min \varphi(Y) = 15y_1 - 10y_2 + 8y_3,$$
$$3y_1 + y_3 \ge 1,$$
$$y_1 - 2y_2 + 2y_3 \ge -1,$$
$$y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 5,$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Оптимальные значения переменных двойственной задачи называют двойственными оценками. На их свойствах и поведении при изменении некоторых условий задачи базируется анализ оптимального решения исходной задачи.

В пределах устойчивости двойственных оценок (границы устойчивости отражаются в «*Отчете по устойчивости*» при использовании надстройки *Поиск решения* в пакете Excel) имеют место следующие свойства [7, 19].

Свойство 1: Величина двойственной оценки ресурса показывает, насколько возросло бы максимальное значение ЦФ, если бы объем данного ресурса увеличился на одну единицу (эффективность малых приращений объемов ресурсов в конкретных условиях задачи).

Это свойство позволяет выявить направления «расшивки» узких мест, обеспечивающие получение наибольшего эффекта при максимизации (минимизации) функции цели в соответствии с выбранным критерием.

Свойство 2: Двойственные оценки отражают сравнительную дефицитность ресурсов в отношении принятого в задаче критерия эффективности. Оценки показывают, какие ресурсы являются более дефицитными (имеют наиболее высокие оценки), какие менее дефицитными и какие недефицитны, т.е. избыточны (нулевые оценки).

Свойство 3: Двойственные оценки позволяют определять «нормы заменяемости ресурсов». Это относительная заменяемость с точки зрения конечного эффекта и лишь в конкретных условиях задачи.

Свойство 4: Двойственные оценки служат инструментом определения эффективности отдельных решений (технологических способов). То есть с их помощью можно определять выгодность производства новых изделий, эффективность новых технологических способов. Пусть для новой переменной x_{n+1} определены коэффициенты c_{n+1}, a_{1n+1}, ..., a_{mn+1}. Тогда если $\Delta_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_{in+1} y_i^* - c_{n+1} \le 0$, то введение новой переменной (то есть нового технологического способа) выгодно в смысле рассматриваемого критерия при данных условиях задачи, если же $\Delta_{n+1} > 0$, то введение новой переменной невыгодно.

Пример 7. Выполнить для задачи линейного программирования из примера 1 следующие задания:

1) решить на ЭВМ в пакете Excel с использованием надстройки *Поиск решения*;
2) провести анализ полученного оптимального плана с помощью двойственных оценок, используя их свойства;
3) сделать выводы о целесообразности производства в данных условиях с точки зрения рассматриваемого критерия;
4) определить целесообразность включения в план производства новой культуры – гречихи с ценой реализации 640 руб/ц, если ее урожайность составляет 25 ц/га, необходимые затраты ручного и механизированного труда составляют 1,5 ч-ч./ц. и 12 ч-дн./га соответственно.

Решение

Исследуемая задача линейного программирования имеет следующий вид:

$$\max F = 3082 \cdot x_1 + 59200 \cdot x_2 + 51700 \cdot x_3 + 112700 \cdot x_4,$$

$$\begin{gathered} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \leq 6250, \\ 10{,}72 \cdot x_1 + 629 \cdot x_2 + 385 \cdot x_3 + 851 \cdot x_4 \leq 76250, \\ 9{,}6 \cdot x_1 + 32{,}4 \cdot x_2 + 17{,}4 \cdot x_3 + 17{,}9 \cdot x_4 \leq 9600, \\ -13{,}4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \leq -10000, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \leq 625, \\ x_j \geq 0 \; (j = 1,..,4). \end{gathered} \qquad (1.20)$$

1) Решим задачу в пакете Excel с помощью надстройки *Поиск решения*. По модели строим таблицу с исходными данными на рабочем листе Excel (как показано ниже в таблице 7).

В ячейку F4 вводим формулу:

= \$B\$3*B4 + \$C\$3*C4 + \$D\$3*D4 + \$E\$3*E4.

Копируем ячейку F4 в ячейки F7, F8, F9, F10 и F11. Заполняем диалоговое окно *Поиск решения*, дополнительно указав в параметрах *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*.

В результате применения команды *Выполнить*, получим оптимальный план посева: 852,967 га пшеницы, 78,856 га овощей. Максимальное значение целевой функции равно 11515881 руб.

Табл. 7. Модель ЗЛП

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		переменные						
2		x_1	x_2	x_3	x_4			
3	значения переменных	0	0	0	0	ЦФ		
4	коэфф-ты ЦФ	3082	59200	51700	112700	0		
5								
6	Вид ресурса	ограничения				левая часть	знак	правая часть
7	Площадь пашни, га	1	1	1	1		≤	6250
8	Затраты труда, ч-ч/га	10,72	629	385	851		≤	76250
9	Затраты механ. труда, ч-дн/га	9,6	32,4	17,4	17,9		≤	9600
10	Произв-во пшеницы, ц	13,4	0	0	0		≥	10000
11	Площадь свеклы, га	0	1	0	0		≤	625

2) Обозначим y_i ($i = 1,..,5$) – двойственные оценки.
Двойственная задача имеет вид:

$$\min \varphi = 6250 \cdot y_1 + 76250 \cdot y_2 + 9600 \cdot y_3 - 10000 \cdot y_4 + 625 \cdot y_5,$$

$$1 \cdot y_1 + 10{,}72 \cdot y_2 + 9{,}6 \cdot y_3 - 13{,}4 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 \geq 3082,$$

$$1 \cdot y_1 + 629 \cdot y_2 + 32{,}4 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 1 \cdot y_5 \geq 59200,$$

$$1 \cdot y_1 + 385 \cdot y_2 + 17{,}4 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 \geq 51700,$$

$$1 \cdot y_1 + 851 \cdot y_2 + 17{,}9 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 \geq 112700,$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1,..,5).$$

Используем для определения значений двойственных оценок теоремы двойственности. Так как первое, четвертое и пятое неравенства системы (1.20) выполняются как строгие неравенства на оптимальном плане, то $y_1 = y_4 = y_5 = 0$.

Так как в оптимальном плане $x_1 > 0$, $x_4 > 0$, то

$$1 \cdot y_1 + 10{,}72 \cdot y_2 + 9{,}6 \cdot y_3 - 13{,}4 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 = 3082,$$

$$1\cdot y_1 + 851\cdot y_2 + 17{,}9\cdot y_3 + 0\cdot y_4 + 0\cdot y_5 = 112700.$$

Получили систему уравнений:

$$10{,}72\cdot y_2 + 9{,}6\cdot y_3 = 3082,$$

$$851\cdot y_2 + 17{,}9\cdot y_3 = 112700,$$

$$y_1 = y_4 = y_5 = 0.$$

Решая ее, определяем оптимальные значения двойственных оценок и соответствующее им значение ЦФ двойственной задачи:

$$y_1 = 0, y_2 = 128{,}703, y_3 = 177{,}324, y_4 = 0, y_5 = 0,$$

$$\varphi_{min} = 11515881.$$

Так как $\varphi_{min} = F_{max}$, то вычисления выполнены верно.

3) Вывод: так как $y_2 > 0$, $y_3 > 0$, то ручной и механизированный труд являются дефицитными ресурсами, причем дефицитность второго ощущается острее.

Относительная заменяемость этих ресурсов определяется отношением: $y_2 : y_3 \approx 0{,}726$.

Заключение: при сложившихся условиях (дефиците ручного и механизированного труда) производство сахарной свеклы и картофеля невыгодно, а посевы пшеницы и овощей должны составить 852,97 га и 78,86 га соответственно.

4) Определим целесообразность включения в план производства новой культуры, которой сопоставим новую переменную x_5. Тогда по условию задачи $c_5 = 640\cdot 25 = 16000$, $a_{15} = 1$, $a_{25} = 1{,}5\cdot 25 = 37{,}5$, $a_{35} = 12$, $a_{45} = a_{55} = 0$.

Вычислим величину $\Delta_{n+1} = \sum a_{in+1} y_i^* - c_{n+1}$. С учетом значений двойственных оценок получаем: $\Delta_5 = 0\cdot 1 + 128{,}7\cdot 37{,}5 + {}$ $+177{,}32\cdot 12 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 16000 = -9045{,}91$. Так как $\Delta_5 \le 0$, то включение гречихи в план производства целесообразно.

1.7. Анализ ЗЛП на чувствительность к изменениям в правой части ограничений

Описанный ниже подход к анализу ЗЛП основан на [7, 19].

Пусть прямая задача линейного программирования имеет вид

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i=1,..,m, \\ x_j \ge 0, & j=1,..,n \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

и известен ее оптимальный план $X^* = (x_1^*,..,x_n^*)$.

Двойственная ей задача

$$\varphi(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, & j=1,..,n, \\ y_i \ge 0, & i=1,..,m \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

имеет оптимальный план $Y^* = (y_1^*,.., y_m^*)$.

Определим, как изменится оптимальный план задачи (I) при изменении правых частей ограничений:

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \tilde{b}_i, & i=1,..,m, \\ x_j \ge 0, & j=1,..,n. \end{cases} \qquad \text{(Ia)}$$

Очевидно, что в двойственной к ней задаче

$$\tilde{\varphi}(Y)=\sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_i y_i \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, & j=1,..,n, \\ y_i \ge 0, & i=1,..,m \end{cases} \qquad \text{(IIa)}$$

изменяются только коэффициенты ЦФ при прежних ограничениях. Это значит, что область допустимых решений (ОДР) задачи (IIа) такая же, как и в задаче (II). Следовательно, можно сделать ***предположение***, что $Y^* = (y_1^*,..,y_m^*)$ также является оптимальным планом задачи (IIа).

Для определения оптимального решения $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*,..,\tilde{x}_n^*)$ задачи (Iа) используется вторая теорема двойственности:

$$\begin{cases} \tilde{x}_j^* \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, & j = 1,..,n, \\ y_i^* \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j^* - \tilde{b}_i \right) = 0, & i = 1,..,m. \end{cases}$$

Если при найденном решении будет выполнено условие первой теоремы двойственности $f(\tilde{X}^*) = \tilde{\varphi}(Y^*)$, то сделанное *предположение было верно*, и мы определили оптимальный план задачи (Iа). Иначе – *предположение было неверным* (в этом случае определить решения задач (Iа) и (IIа) с помощью теорем двойственности невозможно).

Замечание 1: Рассуждения не меняются, если в основной и двойственной задачах присутствовали ограничения типа равенств.

Замечание 2: С помощью инструмента *Поиск решения* пакете Excel можно определить предельное изменение правой части ограничений, при котором не меняется решение двойственной задачи – границы устойчивости. Для этого после выполнения решения при помощи *Поиска решения* необходимо вывести лист *Отчет по устойчивости.*

Замечание 3: Аналогичным образом можно провести анализ на чувствительность к изменению коэффициентов целевой функции при сохранении прочих условий задачи.

Пример 8. Используя теоремы двойственности определить оптимальное решение «новой» ЗЛП, если изменятся правые части ограничений и будут равны соответственно 2500, 1050 и 3000, для приведенной ниже задачи, у которой уже найден оптимальный план: $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 400, x_4^* = 550$.

$$\max f(x_1,x_2,x_3)=7{,}5x_1+3x_2+6x_3+12x_4$$
$$2x_1+x_2+0.5x_3+4\,x_4\le 2400,$$
$$x_1+5x_2+3x_3\le 1200,$$
$$3x_1+6x_3+x_4\le 3000,$$
$$x_{1,2,3,4}\ge 0$$

Решение

Двойственная задача имеет вид:

$$\min\varphi(Y)=2400y_1+1200y_2+3000y_3$$
$$2y_1+y_2+3y_3\ge 7.5,$$
$$y_1+5y_2\ge 3,$$
$$0.5y_1+3y_2+6y_3\ge 6,$$
$$4y_1+y_3\ge 12,$$
$$y_{1,2,3}\ge 0.$$

Ее оптимальное решение находится по второй теореме двойственности: $y_1^*=3,\ y_2^*=1.5,\ y_3^*=0.$

Сделаем предположение, что оптимальное решение двойственной задачи не меняется. Запишем систему уравнений (1.19) для второй теоремы двойственности, где полагаем известными $y_1^*=3,\ y_2^*=1.5,\ y_3^*=0$, а $\widetilde{x}_1^*,..,\ \widetilde{x}_4^*$ – неизвестные.

Получим $\widetilde{X}^*$ = (0, 0, 350, 581.25). Проверяем: $f(\widetilde{X}^*)=\widetilde{\varphi}(Y^*)=$ 9075. Следовательно, предположение верно, и найденный план $\widetilde{X}^*$ действительно оптимальный.

Глава 2
ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

2.1. Задача эмпирического моделирования

Некоторый процесс в изучаемой системе будем описывать моделью «черного ящика», которая иллюстрируется на рисунке 7.

Рис. 7 – Модель «черного ящика»

Задача эмпирического моделирования формулируется следующим образом. Пусть в N независимых экспериментах определены значения независимых переменных x_1, x_2, .., x_n и зависимой переменной y. Требуется по таблице эмпирических данных восстановить функциональную зависимость $y = f(x_1, x_2, .., x_n)$.

С целью определения качества построенной математической модели принято формулировать некоторый критерий качества в виде математического выражения. В этом случае задача эмпирического моделирования приобретает вид задачи минимизации либо максимизации (возможно с ограничениями), то есть становится задачей математического программирования. Для решения таких задач разработано множество специальных как точных, так и численных методов (например, метод множителей Лагранжа и градиентные методы соответственно).

2.2. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК) можно отнести к классическим методам эмпирического моделирования процессов. Суть этого метода заключается в минимизации величины среднеквадратического отклонения расчетных значений моделируемого показателя от фактических, определенных в экспериментах [6, 7, 15–17].

МНК используется для построения функциональных зависимостей произвольного вида, но чаще всего такие зависимости ищут в виде полиномов. Именно такую задачу рассмотрим далее в многомерном и одномерном случае.

Пусть функция $y = F(X)$ задана таблицей своих значений: $y_j = F(X_j)$, $j = 1,...,N$, где X – n-мерный вектор. Требуется найти многочлен $P_m(X)$ фиксированной степени m, для которого будет минимально среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(P_m(X_j) - y_j)^2}\,. \tag{2.1}$$

Многочлен $P_m(X)$ задается своими коэффициентами $a_0, a_1, \ldots$, и следовательно, нужно определить набор коэффициентов, доставляющий минимум функционалу $\Phi(a_0, a_1, \ldots) = \sum_{j=1}^{N}(P_m(X_j) - y_j)^2$.

Идея метода наименьших квадратов в случае одной переменной выражается следующей простой иллюстрацией.

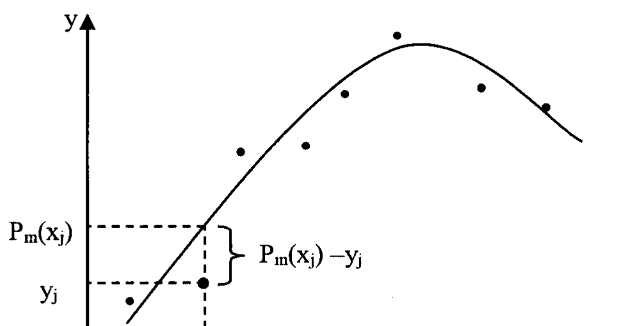


Рис. 8 – Экспериментальные точки и моделируемая зависимость

В случае одномерного вектора $X = (x)$ полином имеет вид

$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$. Для того, чтобы найти указанную зависимость, необходимо определить ее коэффициенты, то есть согласно методу наименьших квадратов найти минимум следующего функционала [6, 7, 15–17]:

$$\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x_j^i - y_j \right)^2 . \tag{2.2}$$

Используя необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0 \text{ для всех } k \in \{0,1,\ldots,m\}, \tag{2.3}$$

получаем так называемую систему нормальных уравнений МНК:

$$\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^{i+k} \right) a_j = \sum_{j=1}^{N} y_j x_j^k , \; k = 0,1,\ldots,m . \tag{2.4}$$

Полученная система есть система линейных уравнений относительно неизвестных a_0, a_1, …, a_m. Можно показать, что определитель этой системы отличен от нуля, это значит, что решение данной системы существует и единственно. Кроме того, несложно проверить, что согласно достаточному условию экстремума, решение системы нормальных уравнений будет давать именно минимум для функционала (2.2).

Если степень полинома $m = 1$, то система (2.4) примет вид:

$$\begin{cases} a_1 \sum\limits_{j=1}^{N} x_j^2 + a_0 \sum\limits_{j=1}^{N} x_j = \sum\limits_{j=1}^{N} x_j y_j , \\ a_1 \sum\limits_{j=1}^{N} x_j + a_0 \cdot N = \sum\limits_{j=1}^{N} y_j . \end{cases} \tag{2.5}$$

При высоких степенях m многочлена $P_m(X)$ система (2.4) является плохо обусловленной. Поэтому, чаще всего МНК применяют для нахождения полиномов, степень которых невысока.

Следует отметить, что при заданной степени m искомого многочлена решение системы нормальных уравнений дает коэффициенты для наилучшей зависимости (в смысле МНК в выбранном классе функций).

Если степень m многочлена заранее неизвестна, то возникает проблема выбора оптимальной степени аппроксимирующего многочлена в условиях, когда исходные данные содержат случайные ошибки. Для решения этой задачи можно принять следующий алгоритм: для каждого $m = 1, 2, ..$ вычисляется величина [6, 7, 15–17]

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{N-(m+1)}\sum_{j=1}^{N}(P_m(X_j)-y_j)^2}\ . \tag{2.6}$$

За оптимальное значение степени следует принять значение m, начиная с которого величина σ_m стабилизируется или начинает возрастать.

Рассмотрим технологию определения параметров эмпирической модели процесса с помощью МНК в пакете Excel.

На рабочем листе пакета Excel строится таблица, где для каждого образца эмпирических данных вычисляется значение $y_j^{расч} = P_m(x_j)$, а также квадрат разности $E_j^2 = \left(y_j^{расч} - y_j\right)^2$. В отдельной ячейке вычисляем сумму квадратов разностей $\sum_j E_j^2$. В надстройке *Поиск решения* данную ячейку указываем как целевую, а ячейки со значениями $a_0, a_1, \ldots, a_m$ как изменяемые ячейки. Ограничения отсутствуют. В параметрах надстройки *не следует* указывать *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*. После завершения процедуры поиска решения будут выведены оптимальные значения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ полинома $P_m(X)$, который можно использовать для прогнозирования процесса.

Пример 9. В пакете Excel сгенерировать 10 наблюдений $\left(x_1^j, x_2^j, y_j\right)$, где x_1, x_2 – равномерно распределенные на [0, 10] случайные величины. Величину y считать измеренной с ошибкой ε, равномерно распределенной на [–1; 1]. Используя полученные значения в качестве эмпирических данных, построить методом наименьших квадратов с помощью средств пакета Excel линейную модель процесса $y = a + bx_1 + cx_2$ и спрогнозировать y при $x_1 = 11$, $x_2 = 11$. Для генерации значений y использовать значения $a = 15$, $b = 4$, $c = -1$.

Решение

Используем встроенную функцию СЛЧИС(), которая выдает равномерно распределенные на отрезке [0; 1] случайные числа.

Вводим в ячейки B2 и C2 формулу = СЛЧИС()*10; в ячейку D2 формулу = 15 + 4*B2 – 1*C2; в ячейку E2 формулу = D2 + 2*(СЛЧИС() – 0,5). Копируем ячейки так, чтобы получить набор из 10 строк данных. В результате в столбцах B, C и E получены необходимые нам случайные наблюдения. Для использования в качестве эмпирических данных эти столбцы нужно скопировать единым массивом и вставить с помощью команды *Специальная вставка* (выбрать *вставить значения*).

	A	B	C	D	E	F	G
1	№ п/п	x_1	x_2	y	$y^{расч}$	y-$y^{расч}$	E^2
2	1	7,27	8,78	34,89	34,75	0,14	0,02
3	2	0,23	1,35	15,25	14,89	0,36	0,13
4	3	9,22	8,59	42,53	42,65	-0,12	0,01
5	4	0,23	2,51	13,95	13,67	0,29	0,08
6	5	2,48	0,97	23,28	24,16	-0,87	0,76
7	6	1,75	9,37	12,31	12,42	-0,11	0,01
8	7	7,59	1,17	44,40	44,02	0,38	0,15
9	8	4,01	9,91	21,10	20,76	0,34	0,11
10	9	9,19	9,33	41,68	41,73	-0,06	0,00
11	10	4,18	8,07	23,02	23,37	-0,35	0,12
12	Прогноз	11	11		47,11		1,41
13							сумма
14	*a*	*b*	*c*				
15	15,41	3,93	-1,05				

Рис. 9 – Пример определения параметров модели с помощью МНК

По описанной выше технологии определим параметры линейной зависимости $y = a + bx_1 + cx_2$ методом наименьших квадратов в пакете Excel. Пример оформления таблицы на рабочем листе Excel приведен выше. Значение в E2 вычислим по формуле = A15 + +B15*B2 + C15*C2. Целевую ячейку установим G12, изменяемые ячейки A15, B15, C15. Минимизируя значение ячейки G12, найдем решение: $a \approx 15{,}41$, $b \approx 3{,}93$, $c \approx -1{,}05$. Итак, с помощью МНК построена линейная модель $y = 15{,}41 + 3{,}93 \cdot x_1 - 1{,}05 \cdot x_2$.

ОТВЕТ: $x_1 = 11$, $x_2 = 11$, прогноз: $y^{пр} = 47{,}11$.

2.3. Метод центра неопределенности

Суть метода центра неопределенности (МЦН) состоит в том, что результаты наблюдений учитываются с некоторой ошибкой Δ, то есть для значений y выполнено условие [5–7, 18]:

$$y = y_j^* \pm \Delta_j . \qquad (2.7)$$

МЦН относят к классу методов, реализующих идеи эмпирического моделирования применительно к задаче определения параметров линейно параметризованной многофакторной зависимости

$$y^* = \sum_{i=0}^{n} \beta_i X_i \qquad (2.8)$$

по эмпирической информации, главное место в которой занимает таблица экспериментальных данных, полученная в N наблюдениях:

$$T = \left\{ \left(y_j ,\, x_{0j}, x_{1j} ,\ldots, x_{nj} \right) \,\middle|\, j = 1,\ldots, N \right\} . \qquad (2.9)$$

Предполагается, что значения входных переменных x_i известны точно (погрешностью их измерения можно пренебречь), а выходная переменная y в j-м наблюдении измеряется с абсолютной погрешностью, оцениваемой по модулю величиной Δ_j. Соответствующая описанному схема получения эмпирических данных показана на рисунке 10.

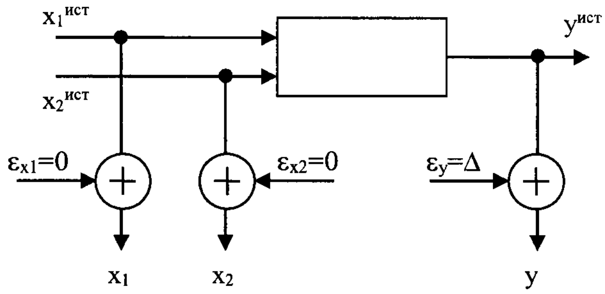


Рис. 10 – Схема получения эмпирических данных

Если точное значение выходной переменной в каждом j-м наблюдении обозначить y_j^*, то имеют место неравенства

$$\left| y_j^* - y_j \right| \le \Delta_j . \qquad (2.10)$$

Учитывая (2.8), получаем систему неравенств

$$\left| \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_{ij} - y_j \right| \le \Delta_j , \; j = 1,..., N \qquad (2.11)$$

или

$$y_j - \Delta_j \le \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_{ij} \le y_j + \Delta_j , \; j = 1,..., N . \qquad (2.12)$$

Основным объектом дальнейшего анализа является область B допустимых значений параметров β_i, (i = 0,.., n)

$$B = \left\{ \beta = (\beta_0,..., \beta_n) \; \middle| \; y_j - \Delta_j \le \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_{ij} \le y_j + \Delta_j , j = 1,..., N \right\} . \qquad (2.13)$$

Множество B называется *множеством неопределенности* [5–7].

Цель МЦН – найти интервальные оценки значения вектора $\beta \in [\underline{\beta}, \overline{\beta}]$, характеризующие параметры зависимости с учетом выполнения условий. Для нахождения верхних и нижних оценок используются решения задач линейного программирования вида

$$\underline{\beta} = \min_{\beta \in B} \beta , \; \overline{\beta} = \max_{\beta \in B} \beta . \qquad (2.14)$$

Идею МЦН в случае одномерного вектора X можно выразить иллюстрацией на рисунке 11.

Главным принципом нестатистической обработки наблюдений, определяющим последующие алгоритмы и получаемые выводы, является отсутствие предпочтений для элементов множества B (их равная значимость при выборе в качестве оценок параметров) [5–7, 18].

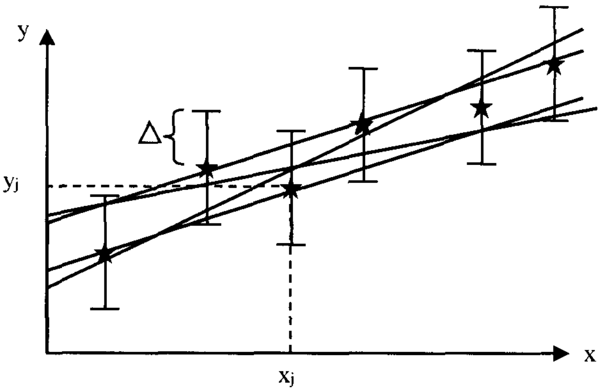


Рис. 11 – Линейные зависимости, построенные по параметрам $\beta \in B$

При этом точечная оценка значений коэффициентов определяется как среднее значение

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{2}\left(\underline{\beta}_i + \overline{\beta}_i\right). \qquad (2.15)$$

Помимо задачи точечного и интервального оценивания параметров зависимости (2.8) в отношении множества B может ставиться задача интервального оценивания выходной переменной y этой зависимости в точке $\tilde{X}$:

$$\underline{y}(\tilde{X}) = \min_{\beta \in B} \beta\tilde{X}, \quad \overline{y}(\tilde{X}) = \max_{\beta \in B} \beta\tilde{X}. \qquad (2.16)$$

Отрезок $[\underline{y}(\tilde{X}),\ \overline{y}(\tilde{X})]$ содержит возможные значения выходной переменной y в точке $\tilde{X}$ при различном выборе параметров. В качестве точечной оценки прогнозного значения зависимости (2.8) в точке $\tilde{X}$ может использоваться полусумма концов интервала, а в качестве предельного отклонения ошибки – полуразность концов:

$$\hat{y}(\tilde{X}) = \frac{1}{2}\left(\underline{y}(\tilde{X}) + \overline{y}(\tilde{X})\right), \quad \Delta y(\tilde{X}) = \frac{1}{2}\left(\overline{y}(\tilde{X}) - \underline{y}(\tilde{X})\right). \qquad (2.17)$$

Существенным преимуществом метода центра неопределенности является его способность определения значимости параметров моделируемой эмпирической зависимости [5–7, 18]. С этой целью в описание множества неопределенности B вводится параметр w, позволяющий изменять «размер» множества неопределенности:

$$B_w = \left\{ \beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n) \;\middle|\; y_j - w\Delta_j \le \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_{ij} \le y_j + w\Delta_j, j = 1, \ldots, N \right\}. \quad (2.18)$$

При $w = 1$ множество B_w совпадает с исходным множеством неопределенности. Увеличение w соответствует растяжению множества неопределенности, а уменьшение параметра w влечет сжатие множества неопределенности. Среди возможных значений параметра w отыскивается наименьшее, при котором B_w остается непустым, то есть

$$w_0 = \arg\min\{w \mid B_w \ne \varnothing\}. \quad (2.19)$$

Оптимальное значение w_0 несложно отыскать методом деления отрезка пополам, при этом непустота множества B_w проверяется методами линейного программирования.

Построение точечной оценки $\hat{\beta} = \left(\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_n\right)$ параметров зависимости предлагается производить, используя формулу (2.14) для множества B_{w0}:

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{2}\left(\min_{\beta \in B_{w_0}} \beta_i + \max_{\beta \in B_{w_0}} \beta_i \right). \quad (2.20)$$

Алгоритм определения значимости параметров достаточно прост. Необходимо последовательно занулять параметры зависимости и выполнять сравнения масштабирующих коэффициентов w: чем выше получено значение w_0 при занулении некоторого параметра, тем более значимым этот параметр является.

Рассмотрим технологию определения параметров эмпирической модели процесса методом центра неопределенности в пакете Excel. Строим на рабочем листе Excel таблицу, содержащую набор эмпирических данных $\left(x_1^j, \ldots, x_n^j, y_j\right)$, как показано на рисунке 12.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	№ п/п	x_1	...	x_n	y	$y_{рас}$	Δ	$y-\Delta$	$y+\Delta$
2	1	7,27	...	8,78	34,89	33,99	1,00	33,89	35,89
3	2	0,23	...	1,35	15,25	15,33	1,00	14,25	16,25
4	3	9,22	...	8,59	42,53	41,60	1,00	41,53	43,53
5	4	0,23	...	2,51	13,95	14,08	1,00	12,95	14,95
6	5	2,48	...	0,97	23,28	24,28	1,00	22,28	24,28
7	6	1,75	...	9,37	12,31	12,43	1,00	11,31	13,31
8	7	7,59	...	1,17	44,40	43,40	1,00	43,40	45,40
9	8	4,01	...	9,91	21,10	20,44	1,00	20,10	22,10
10	9	9,19	...	9,33	41,68	40,68	1,00	40,68	42,68
11	10	4,18	...	8,07	23,02	23,07	1,00	22,02	24,02
12									
13	a_0	a_1	...	a_n					
14	15,9169	3,78875	...	-1,0773					

Рис. 12 – Пример определения параметров модели с помощью МЦН

Задаем в соответствующих ячейках произвольные значения параметров a_0, a_1, …, a_n и вычисляем через эти ячейки (используя ссылки) значения линейной функции $y_{рас} = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.

С помощью надстройки *Поиск решения* необходимо найти решения следующих задач:

$$\begin{array}{ll}
\min a_0, & \max a_0, \\
y_j^{рас} \geq y_j - \Delta, & y_j^{рас} \geq y_j - \Delta, \\
y_j^{рас} \leq y_j + \Delta, & y_j^{рас} \leq y_j + \Delta, \\
j = 1,\ldots,N. & j = 1,\ldots,N. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\min a_n, & \max a_n, \\
y_j^{рас} \geq y_j - \Delta, & y_j^{рас} \geq y_j - \Delta, \\
y_j^{рас} \leq y_j + \Delta, & y_j^{рас} \leq y_j + \Delta, \\
j = 1,\ldots,N. & j = 1,\ldots,N.
\end{array} \qquad (2.21)$$

При решении каждой задачи целевой является ячейка с текущим значением одного из параметров, а изменяемые – все ячейки со значениями a_0, a_1, …, a_n.

Определяем точечные оценки и погрешности для параметров:

$$a_i^ч = \frac{1}{2}\left(\underline{a}_i + \overline{a}_i\right),\quad \varepsilon_{ai} = \frac{1}{2}\left(\overline{a}_i - \underline{a}_i\right), \qquad (2.22)$$

где $\underline{a}_i$, $\overline{a}_i$ – решения задач на минимум и максимум.

Интервальный прогноз по модели в точке $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ найдем, решая с помощью надстройки *Поиск решения* следующие задачи:

$$\begin{array}{ll} \min y_{пр}, & \max y_{пр}, \\ y_j^{рас} \ge y_j - \Delta, & y_j^{рас} \ge y_j - \Delta, \\ y_j^{рас} \le y_j + \Delta, & y_j^{рас} \le y_j + \Delta, \\ j = 1,...,N. & j = 1,...,N. \end{array} \qquad (2.23)$$

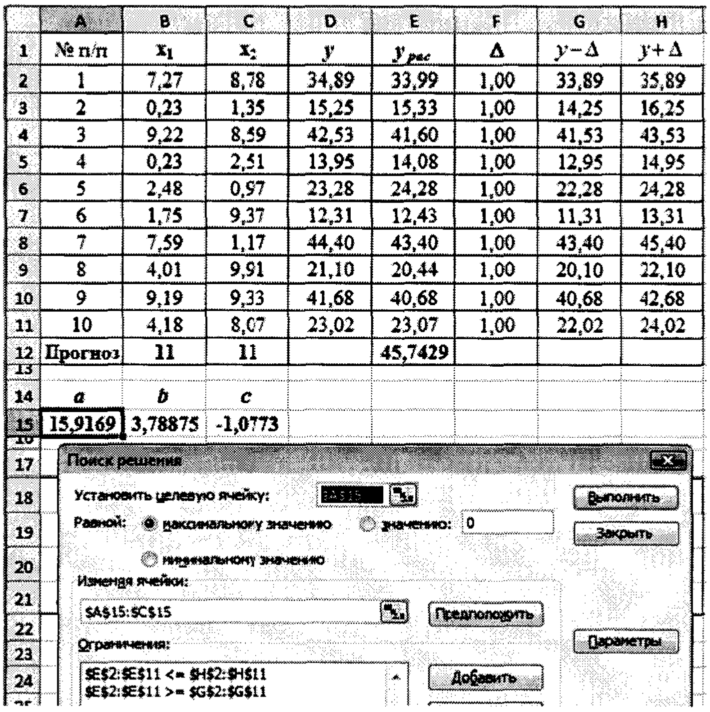
причем ячейка со значением $y_{пр}$ должна быть вычислена заранее со ссылками на ячейки, содержащие значения $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n$. Затем определяем точечную оценку и ошибку прогноза.

Пример 10. Используя набор эмпирических данных $\left(x_1^j, x_2^j, y_j\right)$ $j = 1,..,10$, полученный в примере 6, построить МЦН с помощью средств пакета Excel линейную модель процесса $y = a + bx_1 + cx_2$ и спрогнозировать значение y при $x_1 = 11$, $x_2 = 11$.

Решение

Строим на рабочем листе Excel таблицу, содержащую набор эмпирических данных $\left(x_1^j, x_2^j, y_j\right)$. Задаем в ячейках A15, B15, C15 произвольные значения параметров a, b, c и вычисляем через них и ячейки с исходными данными значения $y_{рас}$ линейной функции. В ячейке D2 задаем = A15 + B15*B2 + C15*C2, а в ячейках G2 и H2 соответственно = D2 – F2 и = D2 + F2.

Следуя технологии определения параметров эмпирической модели процесса с помощью МЦН, решаем задачи (2.21), (2.23), используя *Поиск решения*. Точечные оценки и погрешности для параметров определяем по формулам (2.22). По формулам (2.17) находим точечную оценку и ошибку прогноза.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№ п/п	x_1	x_2	y	$y_{рас}$	Δ	$y-\Delta$	$y+\Delta$
2	1	7,27	8,78	34,89	33,99	1,00	33,89	35,89
3	2	0,23	1,35	15,25	15,33	1,00	14,25	16,25
4	3	9,22	8,59	42,53	41,60	1,00	41,53	43,53
5	4	0,23	2,51	13,95	14,08	1,00	12,95	14,95
6	5	2,48	0,97	23,28	24,28	1,00	22,28	24,28
7	6	1,75	9,37	12,31	12,43	1,00	11,31	13,31
8	7	7,59	1,17	44,40	43,40	1,00	43,40	45,40
9	8	4,01	9,91	21,10	20,44	1,00	20,10	22,10
10	9	9,19	9,33	41,68	40,68	1,00	40,68	42,68
11	10	4,18	8,07	23,02	23,07	1,00	22,02	24,02
12	Прогноз	11	11		45,7429			
14	a	b	c					
15	15,9169	3,78875	-1,0773					

Рис. 13 – Пример определения параметров модели с помощью МЦН

Результаты решения всех задач следующие:

$\underline{a}$ = 14,512;	$\underline{b}$ = 3,785;	$\underline{c}$ = -1,178;	$\underline{y_{пр}}$ = 45,743;
$\overline{a}$ = 15,917;	$\overline{b}$ = 4,188;	$\overline{c}$ = -0,864;	$\overline{y_{пр}}$ = 48,378;
$a^{ч}$ = 15,214;	$b^{ч}$ = 3,986;	$c^{ч}$ = -1,021;	$y_{пр}{}^{ч}$ = 47,061;
ε_a = 0,703;	ε_b = 0,202;	ε_c = 0,157;	$\varepsilon_{пр}$ = 1,318.

Отметим, что решение задач линейного программирования с применением надстройки «Поиск решения» существенно ограничено размером решаемых задач (как правило, это порядка 100 ограничений и 100 переменных).

Все выше изложенное для демо-примера можно выполнить, например, с помощью языка программировани Python. При этом для автоматизации решения ЗЛП можно использовать специальную функцию (из библиотеки scipy.optimize) [20]:

***Linprog**(c, A_ub, A_eq, b_ub, b_eq, method, bounds, options)*

где параметры алгоритма следующие:

c – вектор коэффициентов минимизируемой линейной функции;
A_ub – матрица коэффициентов для ограничений-неравенств;
A_eq – матрица коэффициентов для ограничений-равенств;
b_ub – вектор правой части для ограничений-неравенств;
b_eq – вектор правой части для ограничений-равенств.

Все эти вектора и матрицы находятся из задачи вида (1.1 – 1.2).

Рассмотрим смысл остальных параметров:
method – метод решения ЗЛП, например simplex, inner point;
bounds – границы значений переменных;
options дает возможности задать дополнительные опции.

Приведем фрагмент программы для решения абстрактной ЗЛП с ограничениями вида неравенств, где показано, что не все матрицы требуется указывать (здесь нет ограничений-равенств и не заданы границы для переменных):

```
from scipy.optimize import linprog
..долго-долго задаем нужные матрицы..
res = linprog(C, A_ub=A, b_ub=B, method='simplex')
print(res)
```

Об успешном решении задачи будет свидетельствовать сообщение «*Optimization terminated successfully*». Также будет выведено количество итераций, оптимальное значение функции и найденное решение.

Еще одно замечание: для нахождения решения ЗЛП на максимум требуется «скормить» функции *Linprog* вектор –C. Полученное в ответе значение целевой функции будет противоположно искомому.

2.4. Выявление ошибок в эмпирических данных

К сожалению, идеальные наборы данных в эмпирических наблюдениях встречаются очень редко: ошибается при фиксировании данных наблюдатель, измерительное оборудование обладает недостаточной точностью, на исследуемые данные могут накладываться различные «шумы», т.е. причин неидеальных наблюдений может быть очень много. По этой причине полученные статистические данные изначально не совсем корректны, и требуют предварительной обработки.

Наиболее значимым с практической точки зрения свойством МЦН является его потенциальная способность выявлять ситуации, в которых собранные для построения зависимости совокупности данных противоречивы. Основными источниками противоречий являются либо нарушение гипотезы о структуре конструируемой зависимости, либо наличие выбросов (неправильных наблюдений) в данных. Выбор способа разрешения противоречий в конечном итоге определяется исследователем по результатам всестороннего анализа. Однако результаты анализа во многом зависят и от того, какой информацией располагает для этого исследователь. Опишем возможности, предоставляемые нестатистическими методами, для получения информации, позволяющей разрешить противоречия, возникающие в случае неправильных наблюдений [5–7, 18].

Пусть обработке подлежат информационные совокупности B_1, …, B_N и пусть B_1 сформировано на основе данных, содержащих грубые ошибки. Для линейной по параметрам модели запишем систему неравенств

$$y_j - w_j\Delta_j \le \sum_{i=0}^{n}\beta_i x_{ij} \le y_j + w_j\Delta_j, \quad j = 1,\dots,N. \tag{2.24}$$

Множество неопределенности B_N зависит от $w > 0$, т.е. имеет вид $B(N, w)$. Проверку непротиворечивости исходных данных выполним путем решения задачи

$$w^* = \min\{w \mid B(N, w) \ne \varnothing\}. \tag{2.25}$$

В данном случае находится такое w^*, при котором система неравенств находится на границе совместимости, то есть $B(N, w^* - \varepsilon) = \varnothing$ при любом $\varepsilon > 0$. Очевидно, что при $w^* < 1$ нет оснований для утверждения о противоречивости исходных данных. При $w^* > 1$ определенно можно утверждать, что исходные данные противоречивы [5–7, 18].

Присутствие выбросов в совокупности собранных данных является одной из главных причин пустоты множества неопределенности на первичных этапах построения зависимости. Выброс представляет собой определенную особенность, нетипичное наблюдение по отношению к остальным данным. Иногда выброс дает такую информацию, которую не могут дать другие наблюдения, и является результатом измерений при необычной комбинации условий. В этом случае требуется дальнейшее углубленное исследование. Однако если выбросы вызваны грубыми промахами при регистрации значений наблюдаемых величин, то производится исключение наблюдений из общей информационной совокупности.

Выброс, обусловленный грубым промахом при регистрации результатов измерений, можно трактовать как наблюдение, предельная погрешность которого Δ_j занижена по отношению к реальной ошибке, имевшей место при измерении. Чтобы такое наблюдение стало фиктивно правильным, необходимо найти такое новое значение Δ'_j, являющееся нижней границей реальной ошибки, при котором наблюдение не будет вступать в противоречие с остальными.

Нижние границы предельных ошибок наблюдений, при которых множество неопределенности становится непустым, можно отыскивать, решая задачу [5–7, 18]:

$$\min_{\beta,w} \sum_{j=1}^{N} w_j \,,$$

$$y_j - w_j \Delta_j \le \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_{ij} \le y_j + w_j \Delta_j \,, \tag{2.26}$$

$$w_j \ge 1 \,, \quad j = 1,\dots,N \,,$$

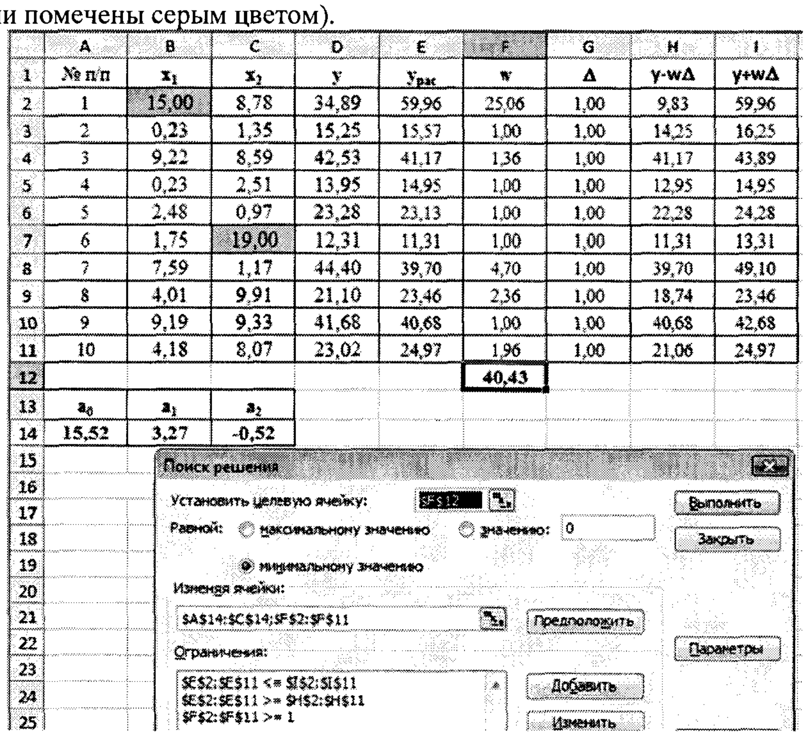
где w_j – масштабирующие коэффициенты, при умножении на которые исходные значения ошибок наблюдений Δ_j дают искомые величины Δ'_j. При этом выполнение неравенства $w_j > 1$ означает, что j-е наблюдение является выбросом и для совместимости с общей информационной совокупностью необходимо увеличить соответствующую ему предельную ошибку наблюдения в w_j раз. Если у исследователя есть основания считать, что надежность некоторых наблюдений одинакова, то система ограничений задачи (2.26) может быть пополнена ограничениями вида $w_{j_1} = w_{j_2} = \dots = w_{j_K}$. В случае, когда в надежности каких-либо наблюдений исследователь уверен полностью, при решении задачи (2.26) соответствующие им величины w_j можно положить равными единице.

Количество наблюдений, для которых коэффициенты w_j, полученные в результате решения задачи (2.26), превосходят единицу, позволяет судить о доле выбросов в совокупности эмпирических данных. Большая доля выбросов может говорить либо о неверно выбранной структуре зависимости, либо о том, что предельные ошибки измерения занижены во многих наблюдениях (например, в результате неверной оценки точности измерительного прибора).

Пример 11. Рассмотрим технологию определения выбросов в наборе эмпирических данных с использованием МЦН в пакете Excel.

Решение

Строим на рабочем листе Excel таблицу, содержащую набор эмпирических данных с ошибками (на рисунке 14 ячейки с ошибками помечены серым цветом).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	№ п/п	x_1	x_2	y	$y_{рас}$	w	Δ	y-wΔ	y+wΔ
2	1	15,00	8,78	34,89	59,96	25,06	1,00	9,83	59,96
3	2	0,23	1,35	15,25	15,57	1,00	1,00	14,25	16,25
4	3	9,22	8,59	42,53	41,17	1,36	1,00	41,17	43,89
5	4	0,23	2,51	13,95	14,95	1,00	1,00	12,95	14,95
6	5	2,48	0,97	23,28	23,13	1,00	1,00	22,28	24,28
7	6	1,75	19,00	12,31	11,31	1,00	1,00	11,31	13,31
8	7	7,59	1,17	44,40	39,70	4,70	1,00	39,70	49,10
9	8	4,01	9,91	21,10	23,46	2,36	1,00	18,74	23,46
10	9	9,19	9,33	41,68	40,68	1,00	1,00	40,68	42,68
11	10	4,18	8,07	23,02	24,97	1,96	1,00	21,06	24,97
12						40,43			
13	a_0	a_1	a_2						
14	15,52	3,27	-0,52						

Рис. 14 – Определение выбросов в эмпирических данных

Используя надстройку *Поиск решения*, решаем ЗЛП:

$$\min_{a_j, w_j} \sum_{j=1}^{N} w_j ,$$

$$\begin{aligned} & y_j^{расч} \ge y_j - w_j \Delta_j , \\ & y_j^{расч} \le y_j + w_j \Delta_j , \\ & w_j \ge 1 , \quad j = 1,\dots,N. \end{aligned} \tag{2.27}$$

В диалоговом окне *Поиск решения* необходимо указать в качестве изменяемых ячеек те, которые содержат значения коэффициентов a_j и w_j.

Если в результате решения задачи (2.27) получено решение $w_1 = \dots = w_N = 1$, то делаем вывод об отсутствии выбросов в наборе эмпирических данных. В случае, когда хотя бы одно значение $w_j > 1$, делаем вывод о наличии выбросов. При этом выбросы не обязательно определяются строками с большими единицы w_j. Возмущение от выброса может передаваться на другие масштабирующие коэффициенты, как показано на рисунке 18. Однако наибольший масштабирующий коэффициент гарантированно соответствует выбросу, поэтому соответствующую строку данных необходимо удалить из набора. На оставшемся наборе данных вновь решаем задачу (2.27). Вывод делается аналогично. Процедура повторяется до тех пор, пока не будут устранены все выбросы, т.е. пока все масштабирующие коэффициенты в результате решения задачи (2.27) не станут равными единице.

Глава 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

3.1. Определение сложных управляемых систем

Простые управляемые системы определяются не масштабами деятельности, а числом центров принятия решения (в простых системах – один центр принятия решения).

Сложные управляемые системы определяются двумя и более центрами принятия решения. Каждый центр характеризуется следующими признаками:

1) собственная цель;
2) набор своих решений;
3) собственная ответственность за свои цели (свои ресурсы).

Основными функциями системы управления являются [12, 15]:

1) задание цели;
2) планирование;
3) реализация планов;
4) информационное обеспечение;
5) согласование интересов внутри организации.

В сложных системах возникают дополнительные функции, такие как согласование и координация решений. Для сложных систем будем считать, что все перечисленные выше функции выполняются. Теперь можно сосредоточить внимание на новых функциях. **Координация решения** – это согласование деятельности, целей, зон ответственности, распределение общих ресурсов, полученного совместного дохода [2, 3, 11–13, 15, 17].

Типичным примером сложной системы в экономике является система корпоративного управления [3, 17].

Корпорация – это финансовая система, в которой собственники капитала отделены от управляющей дирекции. Основываясь на международном опыте, можно утверждать, что главная функция корпоративного управления – обеспечить работу корпорации в интересах акционеров, предоставивших корпорации финансовые ресурсы. Хотя данное положение и представляется достаточно простым, оно скрывает в себе целый ряд сложных и важных вопросов акционерного права и корпоративного управления.

Система **корпоративного управления** представляет собой организационную модель, с помощью которой корпорация представляет и защищает интересы своих инвесторов [11, 12]. Данная система может включать в себя многое: от совета директоров до схем оплаты труда исполнительного звена и механизмов объявления банкротства. Тип применяемой модели зависит от структуры корпорации, существующей в рамках рыночной экономики, и отражает сам факт разделения функций владения и управления современной корпорацией.

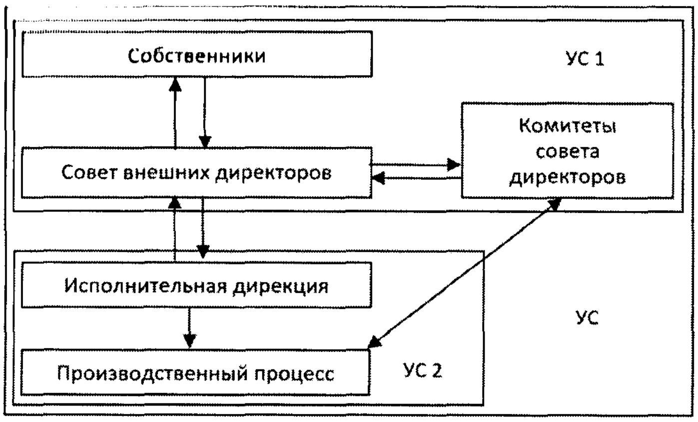


Рис. 15 — Схема корпоративного управления

Из схемы, изображенной на рисунке 15, видно, что в данной системе присутствует два центра принятия решений: собственники и исполнительная дирекция. Среди комитетов можно выделить следующие:

1) комитет стратегического планирования;

2) ревизионный комитет;

3) PR, пресс службы;

4) обоснование и заключение трудовых контрактов с исполнительной дирекцией и контроль за их выполнением.

В общем случае, корпорация – объединение *n* юридических лиц плюс одна управляющая компания (УК).

В корпорации имеются централизованные ресурсы: фонд оборотных средств, основные производственные фонды, уникальные оборудования, фонд развития.

Управление корпорацией может осуществляться по двум схемам: централизованной и децентрализованной [15, 17].

Централизованная схема характеризуется тем, что каждому предприятию выделяется часть объединенного ресурса. Решения «кому и сколько» принимает управляющая компания (рисунок 16).

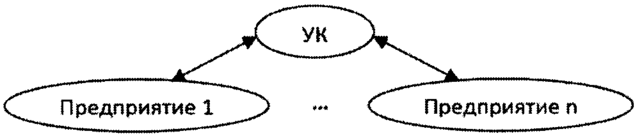


Рис. 16 – Схема управления в централизованной системе

Децентрализованная схема – используется рыночный механизм, центр устанавливает внутрифирменные цены, лимиты. Каждое предприятие «покупает» часть ресурса, которое необходимо для достижения собственных целей. Решения о количестве приобретаемого ресурса принимают предприятия самостоятельно.

В децентрализованных системах значительную роль играют процессы и организационно-экономические механизмы делегирования ответственности.

3.2. Постановка задачи планирования производства в объединении промышленных предприятий

Рассматриваем объединение n промышленных предприятий. Центр осуществляет управление объединением и сам не производит продукцию. Структура данной системы аналогична изображенной на рисунке 16.

Каждое предприятие выпускает продукцию (услуги) в заданной номенклатуре и располагает для производства собственными ресурсами. Часть ресурсов передана в распоряжение управляющей компании (фонды оборотных средств, инвестиционный фонд, фонд развития, транспортные средства, основные производственные фонды).

Результат функционирования центра определяется результатами функционирования отдельных предприятий.

Необходимо для каждого предприятия в рамках заданной номенклатуры определить объемы выпуска продукции такие, чтобы они были обеспечены локальными ресурсами, ресурсами объединения и давали объединенную максимальную прибыль.

В данной постановке задачи не учтены ограничения на сбыт продукции.

3.3. Теоретико-игровая модель планирования производства в объединении предприятий

Рассмотрим модель планирования производства в объединении, предложенную Н.Н. Моисеевым [12–14].

Обозначим через p_i объем продукции, выпускаемой предприятием i, $i=1,...,n$ (предприятия выпускают однотипную продукцию). Целевая функция центра определяется объемами продукции, которую выпускают предприятия $F(p_1,...,p_n)$.

Центр не имеет права устанавливать объемы продукции p_i, он может только влиять на них, используя экономические механизмы.

Величина продукта, произведенного i-м предприятием, определяется объемом капитала q_i и количеством рабочей силы x_i согласно выражению $p_i=\varphi_i(q_i,x_i), i=1,...,n$. Функция φ_i называется производственной. Используем далее широко распространенную в моделировании экономических систем функцию Кобба-Дугласа $p_i=d_i\, q_i^{k_i}\, x_i^{1-k_i}$, $k_i\in[0,1]$, где d_i, k_i – характеристики предприятия.

Доход i-го предприятия G_i равен общей стоимости производимого продукта за вычетом расходов, которые по предположению состоят только в оплате рабочей силы. Пусть c – цена продукции, ω_i – ставка заработной платы на i-м предприятии, $i=1,...,n$. Тогда функции выигрыша предприятий $G_i\,(p_i,x_i)=cp_i-\omega_i\,x_i$. Если величина фондов q_i фиксирована, то объем продукции p_i однозначно определяется количеством рабочей силы x_i.

Считаем, что центр влияет на работу предприятий распределением дополнительного ресурса, который находится в его распоряжении. Если предприятие i получит дополнительный ресурс z_i, то сможет произвести продукцию в объеме $p_i = d_i(q_i + z_i)^{k_i} x_i^{(1-k_i)}$. Таким образом, задача центра состоит в распределении ресурса объемом B, то есть в определении вектора $z = (z_1,\dots, z_n)$, для которого $\sum_{i=1}^{n} z_i \le B,\ \ z_i \ge 0,\ \ i = 1,\dots,n$ и обеспечивающего максимум целевой функции центра $F(p_1,\dots,p_n)$.

Получаем игру $(n + 1)$ лиц, где

$Z = \{z \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} z_i \le B,\ \ z_i \ge 0\}$ – множество стратегий центра;

$X_i = \{x_i \in R \mid x_i \ge 0\}$ – множество стратегий i-го предприятия;

$F(z,x) = F(p_1,\dots,p_n)$ – функция выигрыша центра;

$G_i(z_i,x_i)$ – выигрыш i-го предприятия, $i = 1,\dots,n$.

Так как в рассматриваемом случае множества

$$R_i(z_i) = Arg\max\{G_i(z_i,x_i) \mid x_i \in X_i\} \tag{3.1}$$

являются одноэлементными, поэтому достаточно решить приведенные ниже задачи [13].

Задача центра:

$$F_1 = \inf_{x\in R(z)} F(z^*,x) = \max_{z\in Z}\inf_{x\in R(z)} F(z,x). \tag{3.2}$$

Задача i-го предприятия:

$$G_i(z_i^*,x_i^*) = \max\{G_i(z_i^*,x_i) \mid x_i \in X_i\}. \tag{3.3}$$

Поиск решения задачи (3.3) облегчается тем, что функция $G_i(z_i,x_i)$ при фиксированном z_i вогнута, а ограничение $x \ge 0$ не является лимитирующим. Из равенства $\frac{\partial G_i(z_i,x_i)}{\partial x_i} = 0$ получаем решение задачи i-го предприятия:

$$\tilde{x}_i(z_i) = \hat{c}_i\,(q_i + z_i),\ \text{где}\ \hat{c}_i = \left(\frac{c\cdot d_i(1-k_i)}{\omega_i}\right)^{1/k_i}. \tag{3.4}$$

Величины p_i зависят от переменных z_i линейно:

$$p_i(z_i) = \tilde{c}_i^{1-k_i} d_i(q_i + z_i). \tag{3.5}$$

Следовательно, задача центра

$$F(p_1, ..., p_n) = \tilde{F}(z_1, ..., z_n) \to \max_{z \in Z} \tag{3.6}$$

является обычной задачей математического программирования.

Пусть z^* – решение задачи центра. Тогда оптимальная стратегия i-го предприятия $x_i^* = \tilde{x}_i(z_i^*)$. Пара (z^*, x^*) – оптимальные стратегии в модели планирования производства в объединении предприятий.

Пример 12. Рассмотрим модель планирования производства в объединении двух предприятий. Функции выигрыша предприятий $G_1(p_1, x_1) = cp_1 - 50x_1$ и $G_2(p_2, x_2) = cp_2 - 80x_2$ соответственно. Цена продукции $c > 0$ фиксирована, а объемы выпускаемой продукции $p_1(x_1, z_1) = 10(q_1 + z_1)^{0,5} x_1^{0,5}$, $p_2(x_2, z_2) = 20(q_2 + z_2)^{0,5} x_2^{0,5}$ определяются фиксированным объемом капитала q_1, q_2, дополнительным ресурсом z_1, z_2 и количеством рабочей силы x_1, x_2 соответственно. Центр распределяет ресурс объемом B, обеспечивающий максимум его функции выигрыша $F(p_1, p_2) = M(p_1 + p_2)$, $M > 0$ – константа. Найдем оптимальные стратегии всех участников данного объединения.

Решение

Получаем игру 3-х лиц, где множество стратегий центра $Z = \{(z_1, z_2) \in R^2 \mid z_1 + z_2 \le B, \quad z_1 \ge 0, \quad z_2 \ge 0\}$;

$X_1 = \{x_1 \in R \mid x_1 \ge 0\}$ – множество стратегий 1-го предприятия;

$X_2 = \{x_2 \in R \mid x_2 \ge 0\}$ – множество стратегий 2-го предприятия.

По формулам (6.2) и (6.3) составляем модель игры.

Задача 1-го предприятия:

$$\max_{x_1 \in X_1} \left\{10c(q_1 + z_1^*)^{0,5} x_1^{0,5} - 50x_1\right\}. \tag{3.7}$$

Задача 2-го предприятия:

$$\max_{x_2 \in X_2} \left\{ 20c(q_2 + z_2^*)^{0,5} x_2^{0,5} - 80x_2 \right\}. \tag{3.8}$$

Задача центра:

$$\max_{z \in Z} F\left(p_1(\tilde{x}_1, z_1), p_2(\tilde{x}_2, z_2) \right). \tag{3.9}$$

Найдем решение задачи (3.7). $G_1'(x_1) = 5c(q_1 + z_1)^{0,5} x_1^{-0,5} - 50 = 0$ $\Rightarrow \tilde{x}_1(z_1) = 0{,}01c^2(q_1 + z_1) \Rightarrow p_1(\tilde{x}_1, z_1) = c(q_1 + z_1)$.

Найдем решение задачи (3.8). $G_2'(x_2) = 10c(q_2 + z_2)^{0,5} x_2^{-0,5} - 80 = 0$ $\Rightarrow \tilde{x}_2(z_2) = (0{,}125c)^2(q_2 + z_2) \Rightarrow p_2(\tilde{x}_2, z_2) = 2{,}5c(q_2 + z_2)$.

Задача (3.9) будет иметь вид:

$$F\left(p_1(\tilde{x}_1, z_1), p_2(\tilde{x}_2, z_2) \right) = Mc(q_1 + 2{,}5q_2) + Mcz_1 + 2{,}5Mcz_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \le B, \\ z_1 \ge 0, \\ z_2 \ge 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Получили задачу линейного программирования, которую можно решить графически. На рисунке 17 показана область допустимых решений задачи (3.10) и вектор-градиент целевой функции.

Множество Z стратегий центра – треугольник OKL. Градиент целевой функции $\vec{n} = \{Mc;\ \ 2{,}5Mc\}$. Очевидно, что L(0; B) – точка максимума.

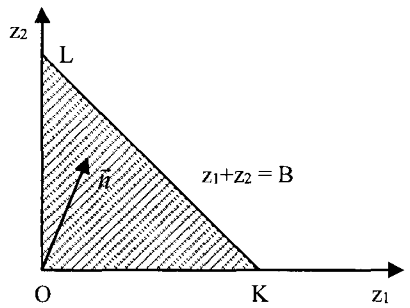


Рис. 17 – Графическое решение задачи центра

Итак, оптимальная стратегия центра: $z_1^* = 0$, $z_2^* = B$. Тогда оптимальные стратегии предприятий соответственно равны: $x_1^* = \tilde{x}_1(z_1^*) = 0{,}01c^2 q_1$, $x_2^* = \tilde{x}_2(z_2^*) = (0{,}125c)^2 (q_2 + B)$.

Замечание: если выигрыш центра будет задан нелинейной функцией, то для решения задачи (3.9) можно использовать метод Лагранжа, в том числе и при количестве предприятий больше двух.

3.4. Модель годового планирования объединения предприятий в форме ЗЛП

Рассмотрим следующую экономическую ситуацию [12, 17]. Объединение состоит из T предприятий, каждое из которых выпускает продукцию n_t видов, потребляя общие ресурсы отраслевого назначения и ресурсы, являющиеся «собственностью» предприятий. Предполагаются известными матрицы A_t, $\bar{A}_t$ норм потребления локальных ресурсов и ресурсов объединения, векторы $B \in R^m$, $B_t \in R^{m_t}$ лимитов ресурсов соответственно объединения и локальных ресурсов предприятий и векторы $P_t \in R^{n_t}$ коэффициентов дохода от реализации продукции предприятием t $(t = 1, \ldots, T)$.

Требуется найти сбалансированный по ресурсам план выпуска продукции, дающий максимальный доход объединению.

Перейдем к формированию условий модели планирования в предположениях о линейности данной модели. Пусть неотрицательный вектор $x_t \in R^{n_t}$ – план предприятия t. Тогда ограничение по локальному ресурсу записывается в виде

$$A_t x_t \le B_t,\ t = 1, \ldots, T. \tag{3.11}$$

Множество X_t планов предприятия t задается следующим образом:

$$X_t = \{x_t \in R^{n_t} \mid A_t x_t \le B_t,\ x_t \ge 0\}, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{3.12}$$

Сбалансированность плана по ресурсам объединения:

$$\sum_{t=1}^{T} \bar{A}_t x_t \le B, \tag{3.13}$$

а целевая функция в модели решений представлена формулой

$$F=\sum_{t=1}^{T}P_t x_t\ . \tag{3.14}$$

Функцию (3.14) при поиске оптимального плана необходимо максимизировать.

Общая система условий модели планирования объединения имеет блочно-диагональную структуру следующего вида:

$$F=P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_Tx_T\to\max, \tag{3.15}$$

$$\begin{cases} A_1x_1 & & & & \le B_1, \\ & A_2x_2 & & & \le B_2, \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & A_Tx_T & \le B_T, \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\bar{A}_1x_1+\bar{A}_2x_2+\ldots+\bar{A}_Tx_T\le B, \tag{3.17}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ldots,\ x_T\ge 0\ . \tag{3.18}$$

Пример 13. Построим описанную выше модель для объединения трех предприятий ($T=3$). Пусть предприятия производят 2, 2 и 3 вида продукции соответственно ($n_1=2$, $n_2=2$, $n_3=3$). На предприятиях имеется 3, 2 и 1 локальных ресурсов соответственно, а в объединении – 2 общих ресурса ($m_1=3$, $m_2=2$, $m_3=1$, $m=2$).

Зададим матрицы норм потребления локальных ресурсов и ресурсов объединения

$$A_1=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}0{,}15 & 0 & 0{,}1\end{pmatrix},$$

$$\bar{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad \bar{A}_2=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 1{,}5\end{pmatrix},\quad \bar{A}_3=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1{,}5\end{pmatrix},$$

вектор лимитов ресурсов объединения

$$B = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix},$$

векторы локальных ресурсов предприятий

$$B_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad B_3 = (17)$$

и векторы коэффициентов дохода от реализации продукции предприятиями

$$P_1 = (10 \quad 15), \quad P_2 = (15 \quad 7), \quad P_3 = (12 \quad 3 \quad 5).$$

Решение

Векторы переменных имеют вид:

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} x_3^1 \\ x_3^2 \\ x_3^3 \end{pmatrix},$$

где x_i^j – объем j-го вида продукции, производимого i-м предприятием.

Модель планирования объединения (3.15) – (3.18) в случае трех предприятий будет иметь вид

$$F = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 \to \max, \tag{3.19}$$

$$\begin{cases} A_1 x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \le B_1, \\ 0 \cdot x_1 + A_2 x_2 + 0 \cdot x_3 \le B_2, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + A_3 x_3 \le B_3, \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \bar{A}_3 x_3 \le B, \tag{3.21}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \ . \tag{3.22}$$

Эту же задачу запишем в развернутой форме:

$$F = 10x_1^1 + 15x_1^2 + 15x_2^1 + 7x_2^2 + 12x_3^1 + 3x_3^2 + 5x_3^3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 0{,}1\cdot x_1^1+0\cdot x_1^2+0\cdot x_2^1+0\cdot x_2^2+0\cdot x_3^1+0\cdot x_3^2+0\cdot x_3^3\le 10\\ 0{,}2\cdot x_1^1+0{,}3\cdot x_1^2+0\cdot x_2^1+0\cdot x_2^2+0\cdot x_3^1+0\cdot x_3^2+0\cdot x_3^3\le 20\\ 0{,}3\cdot x_1^1+0{,}1\cdot x_1^2+0\cdot x_2^1+0\cdot x_2^2+0\cdot x_3^1+0\cdot x_3^2+0\cdot x_3^3\le 10\\ 0\cdot x_1^1+0\cdot x_1^2+0{,}5\cdot x_2^1+0{,}1\cdot x_2^2+0\cdot x_3^1+0\cdot x_3^2+0\cdot x_3^3\le 15\\ 0\cdot x_1^1+0\cdot x_1^2+0{,}2\cdot x_2^1+0{,}2\cdot x_2^2+0\cdot x_3^1+0\cdot x_3^2+0\cdot x_3^3\le 12\\ 0\cdot x_1^1+0\cdot x_1^2+0\cdot x_2^1+0\cdot x_2^2+0{,}15\cdot x_3^1+0\cdot x_3^2+0{,}1\cdot x_3^3\le 17\\ 1\cdot x_1^1+2\cdot x_1^2+4\cdot x_2^1+1\cdot x_2^2+3\cdot x_3^1+2\cdot x_3^2+1\cdot x_3^3\le 400\\ 3\cdot x_1^1+4\cdot x_1^2+3\cdot x_2^1+1{,}5\cdot x_2^2+0\cdot x_3^1+1\cdot x_3^2+1{,}5\cdot x_3^3\le 500, \end{cases} \qquad (3.23)$$

$$x_1^1\ge 0,\quad x_1^2\ge 0,\quad x_2^1\ge 0,\quad x_2^2\ge 0,\quad x_3^1\ge 0,\quad x_3^2\ge 0,\quad x_3^3\ge 0.$$

Решением полученной задачи линейного программирования будет:

$$F_{\max}=2358{,}10,\qquad x_1=\begin{pmatrix}14{,}29\\57{,}14\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}0\\60\end{pmatrix},\quad x_3=\begin{pmatrix}39{,}68\\0\\92{,}38\end{pmatrix}.$$

3.5. Методы решения задачи планирования производства в объединении промышленных предприятий

Задачи с условиями типа (3.16)–(3.18) называются задачами блочного программирования [12, 17].

Блочное программирование – группа методов решения задач линейного программирования большой размерности (по числу переменных и количеству ограничений). Для решения таких задач разработаны специальные алгоритмы, основанные на декомпозиции (разбиении) исходной задачи на блоки. Крупноразмерная модель сводится к нескольким моделям меньшей размерности. Получившиеся задачи решаются вместе по специальным правилам согласования. Необходимость такого подхода обосновывается тем, что с ростом размерности трудоемкость, да и просто сложность решения задач растет невероятно быстро. «Проклятие размерности» характерно для большинства реальных задач математического программирования.

Задача поиска оптимального плана в объединении промышленных предприятий (3.15)–(3.18) является задачей аддитивно-блочного линейного программирования. Блочность данной задачи определяется тем, что локальные ресурсы используются только на своем предприятии. И если бы отсутствовали ограничения по ресурсам объединения, то данная задача распалась бы на несколько задач планирования каждого предприятия в отдельности.

Приведем прием декомпозиции задачи (3.15)–(3.18). В частности, при использовании метода Корнаи-Липтака [12, 17] разбиение указанной задачи проводится в следующем виде.

Задача центра:

$$F = \sum_{t=1}^{T} F_t(z_t) \to \max_{z_1,\dots,z_T}; \quad \sum_{t=1}^{T} z_t \le B; \quad z_t \ge 0, \ t = 1,\dots,T, \tag{3.24}$$

где $F_t(z_t)$ – функция прибыли предприятия t, получаемая решением задачи блока t.

Задача блока t ($t = 1,\dots,T$):

$$F_t\ (z_t) = \max\ \{P_t\ x_t \mid \bar{A}_t\ x_t \le z_t\,;\ x_t \in X_t\}. \tag{3.25}$$

Система задач (3.24)–(3.25) эквивалентна исходной задаче (3.15)–(3.18) [12, 17].

Полученная система (T+1) задач (3.24)–(3.25) является примером иерархически взаимосвязанной совокупности моделей управления, неявно заданной иерархической управляемой системой.

Общая схема построения алгоритмов блочного программирования согласно методу Корнаи-Липтака включает четыре этапа:

1. Выбирается метод декомпозиции.
2. Производится формальная декомпозиция глобальной (исходной) задачи и строится формальная система задач, эквивалентная исходной.
3. Строится численный алгоритм решения формальной системы задач.
4. Полученный алгоритм представляется в виде иерархической системы, в которой осуществляется информационный обмен между центром (ЭВМ центра) и блоками (ЭВМ блоков) в процессе поиска решения (оптимального плана). Разрабатывается программа для ЭВМ, реализующая построенную иерархическую систему.

На третьем этапе могут быть использованы, например: алгоритм, реализующий идеи параметрического программирования;

алгоритм, основанный на методе аппроксимации касательными функции $F_t(z_t)$, и алгоритм Корнаи-Липтака, предложенный авторами рассматриваемого метода декомпозиции.

Достоинством описанного алгоритма является его простота, однако фактически получается приближенное решение исходной задачи.

Список рекомендуемой литературы

1. Алгазин, Г.И. Математические модели системного компромисса / Г.И. Алгазин. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 1999.

2. Бурков, В.Н. Введение в теорию управления организационными системами / В.Н. Бурков, Н.А. Коргин, Д.А. Новиков. – М.: Либроком, 2009. – 264 с.

3. Воронин, А.А. Математические модели организаций : Учебное пособие / А.А. Воронин, М.В. Губко, С.П. Мишин, Д.А. Новиков. – М.: ЛЕНАНД, 2008.

4. Гайндрик, К.В. ИСО и математическое программирование / Гайндрик. – М. : Наука, 1992.

5. Жилин, С.И. Нестатистические модели и методы построения и анализа зависимостей. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук / С.И. Жилин. – Барнаул, 2004.

6. Жилин, С.И. Эксперименты по оцениванию параметров эмпирической зависимости методом наименьших квадратов и методом центра неопределенности / С.И. Жилин // Известия Алтайского государственного университета – 2003 – №1. – С. 24-27.

7. Журавлева, В.В. Введение в системный анализ и исследование операций / В.В. Журавлева. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2010.

8. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике / Н.Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ, 1997.

9. Кудрявцев, Е.М. ИСО в задачах, алгоритмах и программах / Е.М. Кудрявцев. – М. : Наука, 1984.

10. Лотов, А.В. Введение в экономико-математическое моделирование / А.В., Лотов. – М. : Наука, 1984.

11. Максимов, А.В. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования / А.В. Максимов, Н.М. Оскорбин – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2005.

12. Мамченко О.П. Иерархические системы управления в экономике / О.П. Мамченко, Н.М. Оскорбин. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та. – 2007. – 283 с.

13. Моисеев, Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. – М. : Наука, 1981.

14. Моисеев, Н.Н. Математические методы в ИСО / Н.Н. Моисеев, П.С. Краснощеков. – М. : Наука, 1981.

15. Оскорбин, Н.М. Исследование систем управления. Программа и конспект курса / Н.М. Оскорбин. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2009.

16. Оскорбин, Н.М. Математические модели и методы исследования систем управления: учебное пособие / Н.М. Оскорбин, В.В. Журавлева. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2012

17. Оскорбин, Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования / А.В. Максимов, Н.М. Оскорбин. – Барнаул : Изд-во Алт.ун-та, 2005.

18. Оскорбин, Н.М. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределенности / Н.М. Оскорбин, А.В. Максимов, С.И. Жилин // Известия Алтайского государственного университета. – 1998. – № 1. – С. 35-38.

19. Таха, Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – М. : Мир, 1985.

Электронные ресурсы

20. Руководство по SciPy: что это, и как ее использовать: Функции оптимизации. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://pythonru.com/biblioteki/scipy-python (Дата обращения: 10.09.2023)

21. Самоучитель Python. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://pythonworld.ru/samouchitel-python (Дата обращения: 10.09.2023)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Журавлева Вера Владимировна
Оскорбин Николай Михайлович
Алгазин Геннадий Иванович
Маничева Анастасия Станиславовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Издание публикуется в авторской редакции
Дизайн обложки *Ю.В.Луценко*

Издательская лицензия ЛР 020261 от 14.01.1997.
Подписано в печать 23.05.2023.
Дата выхода в свет 29.05.2023.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Усл.-печ. л. 4,65. Тираж 100. Заказ 348.

Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66