О методе квадратур для систем интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода

Жариков А.В., Матюнин Е.В.
АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассматривается численное решение методом квадратур системы интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода:

$$X(t)-\delta\int_D K(t,s)X(s)ds = f(t), \tag{1}$$

где $X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ – искомые функции, $K(t,s)=\begin{pmatrix} 0 & K_1(t,s) \\ K_2(t,s) & 0 \end{pmatrix}$ – ядро системы интегральных уравнений, $f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ – некоторые функции, область $D = [a, b]$ – отрезок. Уравнения рассматривается в пространстве $L_2(D)$.

Данный вид уравнений возникает при решении задач стимулирования второго рода [1] с двумя активными элементами (АЭ) при асимметрии информированности [2].

Предполагается, что информационный вектор w распределен на множестве $W = W_1 \times W_2 \subseteq \mathrm{R}^2$ с плотностью $P(w)$ и функции затрат АЭ имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{c}_1(x_1,x_2) &= \int_W c_1(x_1,x_2)P(w)dw = \int_W \frac{\left(x_1(w)+\alpha x_2(w)\right)^2}{2r_1(w)}P(w)dw, \\ \bar{c}_2(x_1,x_2) &= \int_W c_2(x_1,x_2)P(w)dw = \int_W \frac{\left(x_2(w)+\alpha x_1(w)\right)^2}{2r_2(w)}P(w)dw, \end{aligned} \tag{2}$$

где $r_1(w), r_2(w)$ – функции квалификации активных элементов, α – некоторый параметр.

Функция дохода центра:

$$H(x_1,x_2) = \int_W \left(x_1(w)+x_2(w)\right)P(w)dw, \tag{3}$$

а фонд заработной платы ограничен величиной R.. При использовании центром компенсаторной системы стимулирования, задача центра сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} \Phi(x_1,x_2)=H(x_1,x_2)-\bar{c}_1(x_1,x_2)-\bar{c}_2(x_1,x_2)\to \max\limits_{x_1,x_2}, \\ \bar{c}_1(x_1,x_2)+\bar{c}_2(x_1,x_2)\le R, \end{cases} \quad (4)$$

при разной информированности АЭ: $\dfrac{\partial x_1}{\partial w_1}=0, \dfrac{\partial x_2}{\partial w_2}=0$.

Как показано в работе [2], на одном из этапов решения возникает система интегральных уравнений вида (1)

Для аппроксимации интегралов в системе уравнений (1) используется следующая квадратурная формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i-x_{i-1}). \quad (5)$$

Здесь n – число элементарных отрезков разбиения интервала интегрирования $[a,b]$.

Соответствующая система алгебраических уравнений для нахождения точечного решения имеет вид:

$$\begin{cases} x_1(t_j)-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a-b}{n}x_2(s_i)K_1(t_j,s_i)=f(t_j)+e,(j=1...m); \\ x_2(t_j)-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a-b}{n}x_1(s_i)K_2(t_j,s_i)=f(t_j)+e,(j=1...m), \end{cases} \quad (6)$$

где e – ошибка, связанная с заменой интеграла конечной суммой.

Интерполяция найденных решений осуществляется полиномиальной зависимостью.

Численная схема решения (1) реализована в среде Maple. Проведен анализ предложенной численной схемы для различных начальных параметров и функций ядра на основе зависимости невязки от количества разбиений отрезка $[a, b]$.

Библиографический список

1. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М. : МПСИ, 2005. – 584 с.

2. Жариков А.В. Модели стимулирования агентов промышленной корпорации в условиях асимметрии информированности // Известия Алтайского государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – Барнаул, 2010. – №1. – С. 110–113.