Секция 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УДК 512.57

О доминионах нильпотентных групп

А.И. Будкин
АлтГУ, г. Барнаул

Квазимногообразие групп – это класс групп, определимый специальными формулами, называемыми квазитождествами.

Пусть M – произвольный класс групп. Для любой группы G из M и её подгруппы H доминионом $\mathrm{dom}_G^M(H)$ подгруппы H в группе G относительно класса M (либо в M) называется множество всех элементов из G, образы которых равны для каждой пары гомоморфизмов группы G в любую группу из M, совпадающих на H. Несложно заметить, что $\mathrm{dom}_G^M(-)$ является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы G, в том смысле, что он экстенсивный (доминион подгруппы H содержит H), идемпотентный (доминион доминиона подгруппы H равен доминиону H) и изотонный (если H – подгруппа группы B, то доминион H содержится в доминионе подгруппы B). Возникает понятие замкнутой подгруппы H в группе G (относительно класса M). Представляется интересным и естественным исследование замкнутых подгрупп. Существует тесная связь между понятием доминиона и амальгамами. Целесообразность изучения доминионов в квазимногообразиях обосновывается в [1] тем, что, согласно [2], только квазимногообразия среди аксиоматизируемых классов обладает полной теорией определяющих соотношений, позволяющей определить свободное произведение с объединенной подгруппой.

Пусть H – подгруппа группы G, C – свободное произведение в данном квазимногобразии M группы G на G с объединенной подгруппой H. Группа H называется замкнутой в G (относительно M), если пересечение свободных сомножителей группы C совпадает с H. Группа H называется абсолютно замкнутой в классе M, если она замкнута в каждой группе из M, содержащей H. Группа H называется n-замкнутой в классе M, если она замкнута в каждой группе G из M, порожденной по модулю H n элементами.

Отметим, что доминионы подробно изучены в квазимногообразиях абелевых групп [3–6].

Исследованию доминионов в классе нильпотентных групп также посвящен цикл статей. Выделим из них [7, 8]. В последнее время целенаправленно ведется изучение доминионов метабелевых групп [9, 10, 11, 12]. Доминионы универсальных алгебр исследовались в [14, 15, 16].

В данной работе исследуются доминионы аддитивной группы Q рациональных чисел в группах из нильпотентных квазимногообразий ступени не выше трех.

Обозначим через A группу, имеющую в классе N3 нильпотентных групп ступени не более трех представление A=gr(x, y || [y,x,y]=1), через F – свободную в N3 ранга 2 группу.

Теорема. Пусть M – произвольное квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех, не содержащее группу A, F из M, Q – аддитивная группа рациональных чисел. Тогда группа Q 2-замкнута в M.

Библиографический список

1. Budkin A.I. Dominions in Quasivarieties of Universal Algebras // Studia Logica. – 2004. – V. 78, №1/2. – P. 107–127.

18. А.И.Мальцев, 2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.

3. Шахова С.А. О решетках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44, №2. – С. 238–251.

4. Шахова С.А. Условия дистрибутивности решёток доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, № 4. – С. 484–499.

5. Шахова С.А. Об одном свойстве операции пересечения в решетках доминионов квазимногообразий абелевых групп // Известия АлтГУ. – 2010. – Т. 65, № 1. – С. 41–43.

6. Шахова С.А. О существовании решетки доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Известия АлтГУ. – 2011. – Т. 69, № 1. – С. 31–33.

7. Magidin A. Dominions in varieties of nilpotent groups // Comm. Algebra. – 2000. – V. 28. – P. 1241–1270.

8. Шахова С.А. Абсолютно замкнутые группы в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения // Матеем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 6. – С. 15–18.

9. Будкин А.И. О доминионах в квазимногообразиях метабелевых групп // Сиб. матем. ж. – 2010. – Т. 51, №3. – С. 498–505.
10. Будкин А.И. О доминионе полной подгруппы метабелевой группы // Известия АлтГУ. – 2010. – Т. 65, №2. – С. 15–19.
11. Будкин А.И. О доминионах абелевых подгрупп метабелевых групп // Алгебра и логика. – 2012. – Т. 51, № 5. – С. 608–622.
12. Будкин А.И. Об абсолютной замкнутости абелевых групп без кручения в классе метабелевых групп // Алгебра и логика. – 2014. – Т. 53, № 1. – С. 15–25.
13. Будкин А.И. О замкнутости локально циклической подгруппы в метабелевой группе // Сиб. матем. ж. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1250–1278.
14. Будкин А.И. О доминионах конечных групп // Известия АлтГУ. – 2011. – Т. 69, № 2. – С. 15–18.
15. Будкин А.И. Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства // Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, № 5. – С. 541–557.
16. Будкин А.И. Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства // Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, №5 . – С. 541–557.

УДК 512.57

2-квазимногообразия нильпотентных групп экспоненты 3

Д.В. Ильина
АлтГУ, г. Барнаул

С теорией квазимногообразий можно ознакомиться в [1–4]. Квазитождество вида $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(t_1(x_1,\dots,x_n)=1)\to(t_2(x_1,\dots,x_n)=1)$, где t_1, t_2 – групповые слова в алфавите $x_1,\dots,x_n$, называется полутождеством. Квазимногообразие групп, которое можно задать некоторой системой полутождеств, называется полумногообразием.

В [5] (см. также [1, с. 67–70]) была выявлена тесная связь между полумногообразиями и группами с одним определяющим соотношением. В [6] доказано, что квазимногообразие, порожденное всеми собственными полумногообразиями групп, не совпадает с классом всех групп.

В [7] изучаются полумногообразия, содержащиеся в квазимногообразии, заданном тождествами

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y,z]=1), (\forall x)(x^{p^s}=1), (\forall x)(\forall y)([x,y]^p=1)$, p – простое число. Установлена счетность множества этих полумногообразий. Кроме того, доказано, что множество полумногообразий, содержащихся в многообразии, заданном тождествами $(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y,z]=1), (\forall x)(\forall y)([x,y]^p=1)$, где p – простое число, континуально.

Следующим шагом изучения квазитождеств является исследования 2-квазитождеств. 2-квазитождество – это формула вида

$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(t_1(x_1,\dots,x_n)=1)\&(t_2(x_1,\dots,x_n)=1)\to(t_3(x_1,\dots,x_n)=1)$, где $t_1(x_1,\dots,x_n)$, $t_2(x_1,\dots,x_n)$, $t_3(x_1,\dots,x_n)$ –групповые слова в алфавите $x_1,\dots,x_n$. Квазимногообразие, заданное системой 2-квазитождеств, называется 2-квазимногообразием. Заметим, что многообразия и полумногообразия – это частный случай 2-квазимногообразий.

Квазитождество называется тривиальным в квазимногообразии K, если оно истинно в любой группе из K, либо истинно только в абелевых группах из K. Аксиоматический ранг квазимногообразия - это наименьшее число n такое, что данное квазимногообразие можно задать системой квазитождеств от n переменных.

2-квазитождества в многообразии, заданном тождествами $(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y,z]=1), (\forall x)(x^4=1), (\forall x)(\forall y)([x,y]^2=1)$, p – простое число, исследовались в [8, 9]. В [8] выделен список тривиальных 2-квазитождеств от 3 переменных, в [9] рассмотрен класс нетривиальных 2-квазитождеств от 3 переменных.

Через M будем обозначать многообразие групп, заданное тождествами:$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y,z]=1, \forall x(x3=1)$.

В [10], а также в [11] и [12], было доказано, что любое нетривиальное 2-квазимногообразие аксиоматического ранга 4 и 5, содержащиеся в M, является абелевым. Было установлено, что любое 2-квазитождество от n переменных, в левой части которого содержится некоммутаторное слово, является тривиальным.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.