

уравнения (11) берется с предыдущей итерации. Результаты численных расчетов при  $\omega^1(y) \equiv 0$  согласуются с ранее проделанными расчетами, приведенными в работе [6, 7], при этом время расчетов значительно сокращается из-за меньшего количества арифметических операций.

#### Библиографический список

1. Yih C.S. Stratified flows. – New-York: Academic Press, 1980.
2. Васильев О.Ф., Квон В.И., Лыткин Ю.М., Розовский И.Л. Стратифицированные течения // Гидромеханика. Т. 8. Итоги науки и техники. – М.: ВИНТИ, 1975. – С. 74–131.
3. Белолипецкий В.М., Генова С.Н., Туговиков В.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование задач гидродинамики водотоков. – Новосибирск, 1994.
4. Белолипецкий В.М., Костюк В.Ю., Шокин Ю.И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. – Новосибирск: Наука, Сиб. Отд-ние, 1991.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М., 1989.
6. Кузиков С.С., Семенов С.П. Метод численного расчета задач протекания стратифицированной жидкости // Вычислительные технологии. – 1995. – Т.4, №12.
7. Ингберг М.С., Митра А.К. Расчет истечения стратифицированной жидкости через слив с целью определения условия селективного отбора // Теоретические основы инженерных расчетов, 1988, №3.

УДК 517.95, 532.51

### Плоско-параллельное течение вязкоупругой жидкости Максвелла около критической точки

*С.В. Мелешко<sup>1</sup>, Н.П. Мошкин<sup>2,3</sup>, В.В. Пухначев<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup> Технический университет Суранари, г. Накхон-Ратчасима, Таиланд; <sup>2</sup> ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия;

<sup>3</sup> НГУ, г. Новосибирск, Россия

В докладе рассматривается плоское движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла в полуплоскости  $y > 0$ , ограниченной твердой непроницаемой стенкой, на ней ставятся условия прилипания. Среда характеризуется постоянными временем релаксации  $\tau$ , плотностью  $\rho$  и вязкостью  $\mu$ . В качестве объективной производной в реологическом соотношении выбирается верхняя конвективная производная [1].

Система уравнений движения состоит из шести квазилинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, имеющей как вещественные, так и комплексные характеристики [2]. Неизвестными функциями являются горизонтальная  $u$  и вертикальная  $v$  компоненты скорости, давление  $p$  и элементы тензора вязкоупругих напряжений  $S_{xx} = A$ ,  $S_{yy} = C$ ,  $S_{xy} = S_{yx} = B$ .

$$\begin{aligned} u_x + v_y &= 0, \\ \rho(u_t + uu_x + vv_y) &= -p_x + A_x + B_y, \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y) &= -p_y + B_x + C_y, \\ A_t + uA_x + vA_y - 2(Au_x + Bv_x) + \tau^{-1}A &= 2\mu\tau^{-1}u_x, \\ B_t + uB_x + vB_y - Au_y - Cv_x + \tau^{-1}B &= 2\mu\tau^{-1}(u_y + v_x), \\ C_t + uC_x + vC_y - 2(Bu_y + Cv_y) + \tau^{-1}C &= 2\mu\tau^{-1}v_y. \end{aligned} \quad (1)$$

На основе теоретико-группового анализа в работе [3] выписаны гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла (1). С их помощью изучена задача о слоистом течении между параллельными пластинами (аналог классического течения Куэтта в динамике вязкой несжимаемой жидкости).

Решения системы (1), построенные в [2, 3], являются эффективно одномерными. Оказывается, что множество ее точных решений можно расширить, отказавшись от требования независимости напряжений от  $x$ . Основным является случай, когда функция  $A$  не зависит от  $x$ , функция  $B$  линейна по  $x$ , а функции  $p$  и  $C$  квадратичны по  $x$ ,

$$\begin{aligned} A &= a(y,t), \quad B = xb(y,t), \\ C &= x^2c(y,t) + d(y,t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$p = x^2 P(y, t) + Q(y, t).$$

Система (1) допускает двухпараметрическую группу операторов переноса и галилеева переноса по оси  $x$ . Ей соответствует частично инвариантное решение ранга 2 с полем скоростей

$$u = x f_y(y, t), \quad v = -f(y, t). \quad (3)$$

### Стационарное течение

Полностью рассмотрен подкласс решений данного вида, характеризующий стационарные движения. Положим  $A = a(y)$ ,  $B = xb(y)$ ,  $C = x^2 c(y) + d(y)$ ,  $p = x^2 P(y) + Q(y)$ . Соответствующее решение описывает течение среды Максвелла вблизи критической точки  $x = y = 0$ . При  $y \rightarrow \infty$  течение сопрягается с потенциальным потоком  $u = kx$ ,  $v = -ky$  ( $k = \text{const} > 0$ ). Исключая давление, применяя аффинное преобразование и учитывая вид компонент поля скорости (3) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$\begin{aligned} f'^2 - ff'' &= b' - 2c + 1, \\ \lambda(a'f + 2af') - a &= 2f', \\ \lambda(b'f - bf' + af'') - b &= -f'', \\ \lambda(c'f - 4bf'') - c &= 0. \end{aligned}$$

Штрих обозначает производную по  $y$ ,  $\lambda = k\tau$ . Решение системы уравнений удовлетворяет краевым условиям:

$$f(0) = f'(0) = 0;$$

$$f' \rightarrow 1, b \rightarrow 0, c \rightarrow 0, \quad a \rightarrow -2 \cdot (2\lambda - 1)^{-1}, y \rightarrow \infty.$$

При  $\tau \rightarrow 0$  решение переходит в классическое решение К. Хименца, описывающее течение вязкой несжимаемой жидкости около критической точки. Выполнены расчеты полей скорости и напряжений в широком диапазоне значений параметра  $\lambda = k\tau$ . Значение  $\lambda = 1/2$  является особым:  $a \rightarrow \infty$  при  $y \rightarrow \infty$ .

### Нестационарное течение

В нестационарной задаче найдены частные решения переопределенной системы уравнений, записанной в лагранжевых координатах. Переход к лагранжевым координатам является нелокальным преобразованием, поэтому при анализе, предложенном в [3], такое «двумерное» решение не удалось заметить. «Двумерность» характеризуется зависимостью от координаты  $X$  специального вида.

Система определяющих уравнений после перехода к лагранжевым координатам сводится к слабо нелинейной симметрической гиперболической системе и квадратуре. Этот переход выполняется с помощью решения задачи Коши  $y_t = v(y, t)$ ,  $t > 0$ ;  $y = \xi$ ,  $t = 0$ . В системе появляется дополнительная искомая функция  $y_\xi = z$ , удовлетворяющая уравнению в вариациях  $z_t = wz$ , где обозначено  $w(\xi, t) = v_y[y(\xi, t), t]$ . Обозначим далее  $a = f(\xi, t)$ ,  $b = g(\xi, t)$ ,  $c = h(\xi, t)$ . Вместо  $f, g, h$  удобно ввести новые функции  $r = f + \mu\tau^{-1}$ ,  $j = (f + \mu\tau^{-1})h - g^2$ ,  $k = z^{-1}$ . В результате получается система пяти квазилинейных уравнений имеющая дивергентный вид,

$$\begin{aligned} (\rho zw)_t + g_\xi &= z [2\rho w^2 + 2(j + g^2)r^{-1} + \varphi(t)], \\ (r^{-1}zg)_t + w_\xi &= zgr^{-1}(4w - \mu\tau^{-2}r^{-1}), \\ j_t &= [2(w - \tau^{-1}) + \mu\tau^{-2}r^{-1}]j + \mu\tau^{-2}r^{-1}g^2, \\ r_t &= -(2w + \tau^{-1})r + \mu\tau^{-2}, \quad z_t = zk. \end{aligned} \quad (4)$$

После ее решения и возвращения к эйлеровым координатам функции  $p, Q$  находятся в квадратурах, а функция  $d$  определяется из линейного уравнения первого порядка.

Отметим свойства полученной системы. Так как  $z = 1$  при  $t = 0$ , то  $z$  остается положительной на всем интервале существования решения. Если в начальный момент  $r > 0$  то это неравенство выполнено для  $t > 0$ . Данная система содержит две «звуковые» характеристики, которым соответствуют волны сдвига, и трехкратную контактную характеристику. Дивергентный вид системы позволяет получить интеграл энергии, содержащий в левой части сумму норм функций  $w_i(\cdot, t)$ ,  $g_i(\cdot, t)$  в пространстве  $L^2$ . Эти нормы равномерно ограничены, как и нормы функций  $j_t, r_t, z_t$ . Этот факт означает, что в решениях начально краевых задач невозможна градиентная катастрофа, хотя слабые разрывы решения допускаются. В этом смысле указанная система близка к слабо нелинейной системе двух уравнений гиперболического типа, рассмотренной в работе Н.Н. Яненко [4].

Рассмотрены простейшие решения и слабые разрывы решений системы уравнений (4). Удобно переписать систему (4) в виде

$$\begin{aligned}
 \rho w_t + z^{-1} g_\xi &= \rho w^2 + 2h - \varphi(t), \\
 g_t + z^{-1} r w_\xi &= (w - \tau^{-1})g, \\
 h_t + 2z^{-1} g w_\xi &= (4w\tau^{-1})h, \\
 r_t &= -(2w + \tau^{-1})r + \mu\tau^{-2}, \quad z_t = wk.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Прямая проверка показывает, что система (5) имеет решения, в которых функции  $w, h, r, z$  не зависят от  $\xi$  а  $g = \xi \cdot s(t)$ . Система (5) допускает решения, в которых функция  $g$  является нечетной функцией переменной  $\xi$ , а остальные искомые – четными функциями этой переменной. Сформулируем задачу Коши для системы (5):

$$\begin{aligned}
 w &= w_0, \quad h = h_0, \quad r = r_0, \quad z = 1; \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t = 0; \\
 g &= \begin{cases} -g_0, & \xi < -1; \\ g_0 \xi, & |\xi| < 1; \\ g_0, & \xi > 1. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

В точках  $\xi = \pm 1$  на прямой  $t = 0$  зарождаются слабые разрывы, которые распространяются вдоль звуковых характеристик  $\xi = \pm X(t)$ , выходящих из этих точек. Нелинейная система (5) решалась численно. На каждом шаге по времени достигалась сходимость итераций по нелинейности. Первые два уравнения переписывались с использованием «инвариантов» Римана и аппроксимировались с учетом направления характеристик. Функции  $h, r, z$  определялись как решение обыкновенных дифференциальных уравнений при известных значениях функций  $w, g$ . На рисунках представлены результаты численного решения системы (5) для следующих значений начальных условий  $w_0 = -1, \quad j = 1, \quad r = 1, \quad z = 1, \quad g_0 = 1$ . На рисунке 1 приведены значения функции  $g(\xi, t)$  для нескольких моментов времени. Рисунок 2 показывает изменение функции  $w(\xi, t)$  для четырех моментов времени.

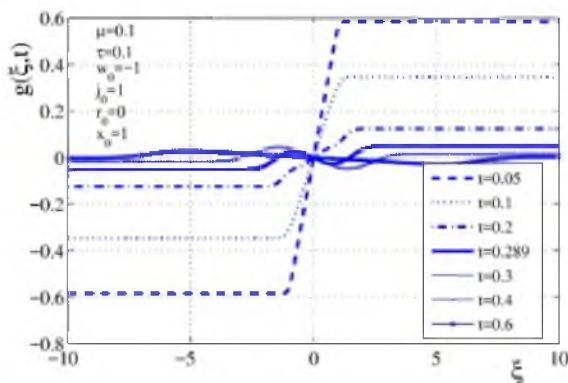


Рис. 1

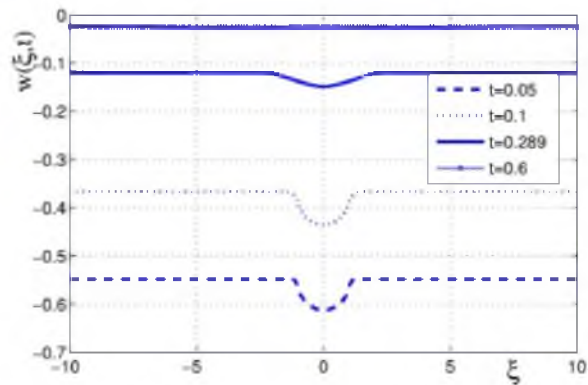


Рис. 2

Работа поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ НШ-8146.2016.1 и грантом РФФИ (проект 16-01-00127).

#### Библиографический список

1. Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неьютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 312 с.
2. Пухначев В.В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2010. – Т. 51, – № 4. – С. 116–126.
3. Ляпидевский В.Ю., Пухначев В.В. Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Современные проблемы механики : сборник статей к 80-летию со дня рождения академика А.Г. Куликовского / тр. МИАН, 281, МАИК. – М., 2013. – С. 84–97.
4. Яненко Н.Н. О разрывах в решении квазилинейных уравнений // Успехи математических наук. – 1955. – Т. X, вып. 2 (64). – С. 195–202.