УДК 551.345+539.3

Математическая модель внутренней эрозии

А.А. Папин, Н.Н. Сибин
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматриваются процессы фильтрации подземных вод и внутренней суффозии. Грунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда. Поры полностью заполнены смесью воды (i = 1) и подвижных твердых частиц (i = 2). Доля пор в грунте (i = 3) определяется пористостью $\phi = (V_1 + V_2)/V$, где $V = V_1 + V_2 + V_3$ - общий объем грунта, V_1, V_2, V_3 – соответственно объемы воды, подвижных твердых частиц и скелета грунта.

Уравнения сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазового перехода имеют вид [1]

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{u}_1) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \vec{u}_2) = \dot{m}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3 \vec{u}_3) = -\dot{m}, \tag{3}$$

где $\dot{m}$ – интенсивность фазового перехода (суффозионный поток); $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ – соответственно истинные скорости воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта; $\rho_1 = \phi s_1 \rho_1^0$, $\rho_2 = \phi s_2 \rho_2^0$, $\rho_3 = (1-\phi)\rho_3^0$ – приведенные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета; $s_1 = V_1/(V_1+V_2), s_2 = V_2/(V_1+V_2)$-концентрации воды (насыщенность) и подвижных твердых частиц в порах; $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$ – истинные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ – оператор градиента, $x = (x_1, x_2, x_3)$. В рассматриваемом случае $\rho_3^0 = \rho_2^0$, так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта.

Уравнения сохранения импульса для воды и подвижных твердых частиц грунта берем в виде [1, 2, 3]

$$s_i \phi(\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0(\phi)\frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), i = 1, 2. \tag{4}$$

Здесь $K_0(\phi)$ – симметрический тензор фильтрации пористой среды; $\bar{k}_{0i}$ – относительные фазовые проницаемости $(k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0, k_{0i}|_{s_i=0} = 0, 0 \leq s_i \leq 1)$; μ_i – коэффициенты динамической вязкости; $\vec{g}$ – ускорение силы тяжести; p_1, p_2 – соответственно давления первой и второй фаз.

Пусть $s = s_1$, тогда $1 - s = s_2$. Разность фазовых давлений удовлетворяет соотношению вида [1, 3]

$$p_2 - p_1 = p_c(s, x) \geq 0, \tag{5}$$

где p_c – заданная функция обладающая свойствами [4, 5]:

$$p_c(x,s) = p_0(x)j(s), \quad p_0(x) > 0,$$

$$j(s) \geq 0, \quad j(0) = \infty, \quad j(1) = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial s} < 0.$$

В настоящей работе предлагается использовать следующее соотношение для определения суффозионного потока [6]

$$\dot{m} = \delta(s)R(\phi)max\{|\vec{v}_1| - v_k, 0\}. \tag{6}$$

Здесь

$$\delta(s)=\begin{cases}0, & s\ge 1;\\ 1-s, & 0<s<1;\\ 1, & s\le 0.\end{cases}\qquad R(\phi)=\begin{cases}0, & \phi\ge 1;\\ \phi(1-\phi), & 0<\phi<1;\\ 0, & \phi\le 0.\end{cases}$$

В [7] дан обзор работ по моделированию суффозионнх процесов. В [8] показано, что в случае одной пространственной переменной система (1)–(6) сводится к системе двух уравнений:

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(K_0(\phi)a(s)\nabla s-b(s)v(t)+F(s,\phi)), \quad (7)$$

$$\frac{\partial(1-\varphi)}{\partial t}=-\dot{m}, \quad (8)$$

Здесь

$$a=-\frac{k_{01}k_{02}}{k}\frac{\partial p_c}{\partial s},$$

$$\vec{f}_0=K_0k_{01}(\int_s^1\frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)}\nabla_x\frac{\partial p_c(\xi,x)}{\partial\xi}d\xi+\rho_1^0\vec{g}),$$

$$\vec{F}=\vec{f}_0-b\vec{f},\quad b(s)=\frac{k_{01}}{k},$$

$\vec{f}=K_0(k_{02}\nabla_x p_c+k\int_s^1\frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)}\nabla_x\frac{\partial p_c(\xi,x)}{\partial\xi}d\xi+(k_{01}\rho_1^0+k_{02}\rho_2^0)\vec{g})$. Для (7), (8) рассмотрена задача

$$s(0,t)=s_0(t),\quad s(1,t)=s_1(t), \quad (9)$$

$$s(x,0)=s^0(x),\quad \phi(x,0)=\phi^0(x).$$

Особенностью данной задачи является необходимость обоснования физического принципа максимума для пористости ϕ и насыщенности s вида $0\le\phi\le 1$, $0\le s\le 1$. Кроме того коэффициент $a(s)$ в общем случае обладает свойствами $a(0)=a(1)=0, a(s)>0$ при $s\in(0,1)$, то есть уравнение (7) является вырождающимся на решении, а переменная неизвестная пористость существенно усложняет структуру системы (7), (8).

Определение 1. Классическим решением задачи (7)–(9) в цилиндре Q_T будем называть пару функций $s(x,t),\phi(x,t)\in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_T)$, удовлетворяющую уравнениям (7), (8) и условиям (9) в обычном смысле. Причем $0\le s\le 1$, $0<\phi\le 1$.

Теорема. Пусть данные задачи (7)–(9) подчиняются условиям:

1. Функции $K_0(\phi),a(s),b(s),F(s,\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s\in[0,1]$, $\phi\in[0,1]$ и удовлетворяют условиям

$$0<m\le K_0(\phi),a(s)\le M<\infty,$$

$F(s,\phi)=0$ при $s<0$, $s>1$.

2. Функции $v(t)$, $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s^0(x)$, $\phi^0(x)$ удовлетворяют следующим условиям гладкости

$$v(t),s_0(t),s_1(t)\in C^{2+\alpha}[0,T];s^0(x),\phi^0(x)\in C^{2+\alpha}(\overline{Q})$$

и условиям согласования

$$s_0(0)=s^0(0),s_1(0)=s^0,$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$|v(0)|>v_k,0\le s^0(x)\le 1,0<m_0\le\phi^0\le 1,$$

$$0\le s_0(t)\le 1,0\le s_1(t)\le 1$$

где m_0,m,M,v_k – известные положительные постоянные.

Тогда для любого конечного интервала $(0,T]$ задача (7)–(9) имеет единственное классическое решение:

$$\phi(x,t), s(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_T).$$

Более того

$$0 \le s(x,t) \le 1, 0 < \phi(x,t) \le 1, (x,t) \in Q_T.$$

Близкие задачи рассматриваются в работах [9–12].

Автомодельное решение

Рассмотрим одномерное движение при условиях $\vec{g} = 0$, $\vec{u}_3 = 0$.

Решение системы (1)–(4) ищется в области $(-\infty, ct)$ в предположении, что все искомые функции зависят лишь от переменной $\xi = x - ct$ (c – неизвестная постоянная). Вместо (1)–(4) получим

$$-c\frac{d(s\phi)}{d\xi} + \frac{dv_1}{d\xi} = 0, \tag{10}$$

$$-c\frac{d(1-s)\phi}{d\xi} + \frac{dv_2}{d\xi} = \frac{\dot{m}}{\rho_2^0}, \tag{11}$$

$$-c\frac{d(1-\phi)}{d\xi} = -\frac{\dot{m}}{\rho_2^0}. \tag{12}$$

Краевые условия:

$$v_1|_{\xi=0} = v_1^+, \quad v_2|_{\xi=0} = v_2^+, \quad s|_{\xi=0} = s^+, \quad \phi|_{\xi=0} = \phi^+,$$

$$v_1|_{\xi->-\infty} = v_1^-, \quad v_2|_{\xi->-\infty} = v_2^-, \quad s|_{\xi->-\infty} = s^-, \quad \phi|_{\xi->-\infty} = \phi^-.$$

Следуя [11, 12] приводим к системе уравнений для s, φ

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{k_{01}c}{a(s)kK_0} - \frac{cs\phi}{a(s)K_0}, \tag{13}$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{\lambda}{c}(1-s)\phi(1-\phi)(|c|s\phi - v_k). \tag{14}$$

Здесь

$$v_1^- = \frac{v_1^+ s^- \phi^-}{s^+\phi^+}, \quad v_2^- = \frac{v_1^+ - v_1^-}{s^+\phi^+}, \quad v_2^+ = \frac{v_1^+}{s^+\phi^+} - v_1^+, \quad c = \frac{v_1^+}{s^+\phi^+}.$$

Для получения численного решения системы (13), (14)с заданными краевыми условиямииспользуется метод Рунге-Кутта 4 порядка точности. Численный алгоритм решения системы реализован на языке С++ с использованием библиотеки QT.

Симметрический тензор фильтрации пористой среды $K_0 = \phi^2$. Капиллярное давление $p_c = 1/(s^2 - 1)$.

Относительная фазовая проницаемость воды и подвижных твердых частиц

$$k_{01} = \begin{cases} 0, & s < 0; \\ s^{n_1}, & 0 < s < 1; \\ 1, & s > 1. \end{cases} \quad k_{02} = \begin{cases} 1, & s < 0; \\ (1-s)^{n_2}, & 0 < s < 1; \\ 0, & s > 1. \end{cases}$$

На рисунке 1 и рисунке 2 рассмотрен случай, когда $n_i = 2$,

s^- =0.503, s^+=0. 99, ϕ^- =0.9, ϕ^+ =0.25, v_1^+ =-0.007 м/с.

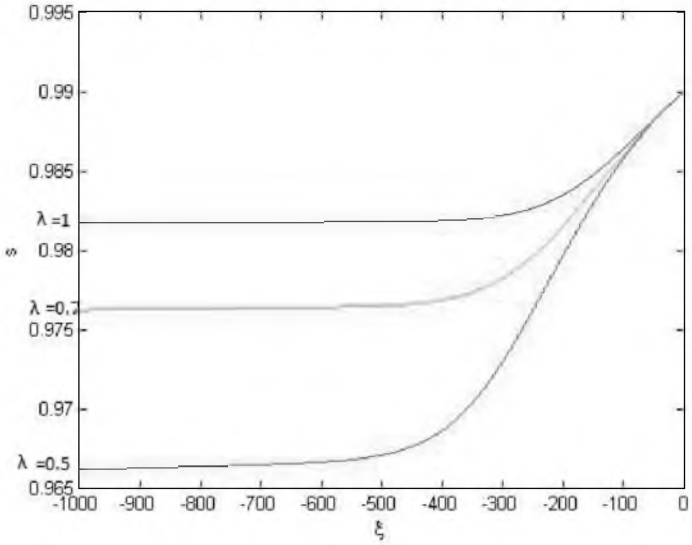

Рисунок 1 – Изменение концентрации воды

На рисунках 1, 2 видно выполнение физического принципа максимума для концентрации воды s и пористости грунта ϕ. Заметим, что при увеличение λ концентрация водыи пористость грунта увеличиваются.

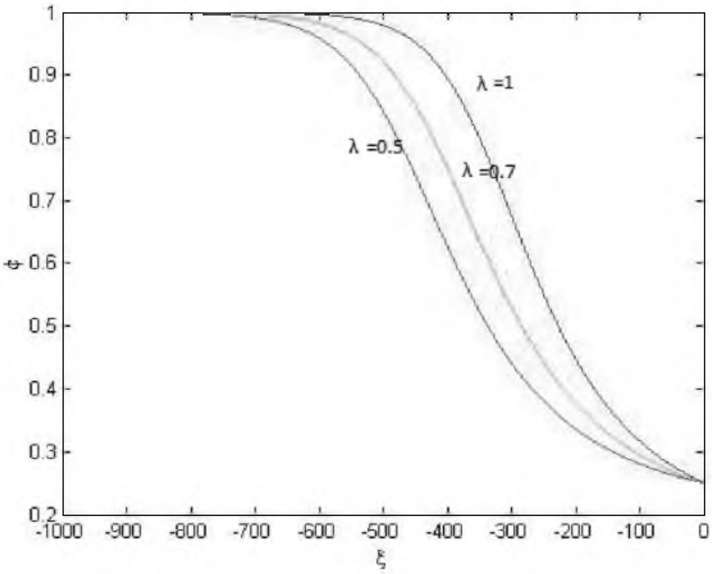

Рисунок 2 – Изменение пористости грунта

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291и государственного задания Министерства №01201460959.

Библиографический список

1.Папин А.А., Вайгант В.А., Сибин А.Н. Математическая модель изотермической внутренней эрозии // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2015.

2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.

3. Gard S.K., Pritchett J.W. Dynamics of gas - fluidized beds. Journal of Applied Phisics // Journal of Applied Phisics, Vol. 46, № 10, 1975.

4.Wang J., Walters D.A., Settari A., Wan R.G. Simulation of cold heavy oil production using an integrated modular approach with emphasis on foamy oil flow and sand production effects // 1st Heavy Oil Conference 2006.

5. Vardoulakis I.,Sulem J. Bifurcation Analysis in Geomechanics. – London, 2005. – P. 138–176.

6.Vardoulakis I. Sand – production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production. – 2006.

7. Папин А.А. Проблемы математического моделирования внутренней суффозии грунта: препринт №1/15/ А.А. Папин, А.Н. Сибин. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015.

8. Папин А.А., Сибин А.Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2015.

9. Сибин А.Н. Математическая модель деформации мерзлого грунта вблизи термокарстовых озер // Анализ, геометрия и топология: сб. тр. Всерос. молодеж. школы-семинара. – Барнаул, 2013. – С. 132–142.
10. Папин А.А., Гагарин Л.А., Шепелев В.В., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2013. – Вып. 1/2 (77). – С. 38–41.
11. Сибин А.Н. Численное решение двумерной задачи фильтрации с учетомсуффозионных процессов // Ломоносовские чтения на Алтае : сборник научных статей международной школы-семинара. – Барнаул АлтГПА, 2014. – Ч. II. – С. 389–393.
12. Bonelli S., Marot D. On the modelling of internal soil erosion // The12th International Conference of International Association for ComputerMethods and Advances in Geomechanics (IACMAG). – 2008.

УДК 532.546 + 544.344.015.4

Математические модели динамики снежного покрова[1]

Папин А.А., Юст Е.С.
АлтГУ, г. Барнаул

Снег рассматривается как пористая среда, твердый каркас которой составляют подвижные частицы льда. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение воды, воздуха и пара. Тающий снег является четырехфазной средой, состоящей из воды ($i=1$), воздуха ($i=2$), льда ($i=3$) и пара ($i=4$). Учет сублимации связан с тем обстоятельством, что значительные объёмы снега испаряются и при отрицательных температурах, минуя жидкую фазу.

Уравнения неразрывности с учетом пористости принимают вид [1]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{4} I_{ji}, \quad i = 1,2,3,4 \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^{4} I_{ji} = 0. \quad (1)$$

Здесь ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ($\alpha_i = \phi_i s_i, i = 1,2,4, \alpha_3 = 1-\phi$); ϕ – пористость; t – время; $\vec{u}_i, s_i$ – скорости и насыщенности фаз (доля поры, занятой i-й фазой); I_{ij} – интенсивность перехода массы из i-ой в j-ю составляющую в единице объема в единицу времени; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, $(x_1 x_2 x_3)$ – переменные Эйлера.

По определению, насыщенности меняются в пределах $0 \le s_i \le 1$, и, более того,

$$s_1 + s_2 + s_4 = 1. \quad (2)$$

Вместо уравнений сохранения импульса в теории фильтрации используется обобщенный закон Дарси [2]:

$$s_i \phi(\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x} + \rho_i^0 \vec{g}\right), \quad i = 1,2,4, \quad (3)$$

где $\overrightarrow{u_3}$ – скорость твердого скелета (льда), K_0 – тензор фильтрации (функция пористости), $\overline{k_{0i}}$ – относительные фазовые проницаемости, μ_i – коэффициенты динамической вязкости, p_i – давления фаз, $\vec{g}$ –вектор ускорения силы тяжести.

В соответствии с законом Лапласа давления в фазах i и j различаются на величину каппилярного скачка ($i < j$) [3]

$$p_i - p_j = p_{cij} = \sigma_{ij} J(s_i, s_j) \sqrt{\frac{\phi}{|K_0|}} \cos \gamma_{ij}, \quad (4)$$

где σ_{ij} – коэффициент поверхностного натяжения, γ_{ij} – угол смачива-ния, $J(s_i, s_j)$ – функция Леверетта.

Уравнение сохранения энергии для тающего снега с учетом сублимации берется в виде [4]

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291 и государственного задания Министерства №01201460959