$$F(c) \equiv c e^{-\frac{c^2}{4\kappa_1}} + \frac{1 + A_1 \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}\right) + \phi_1^0}{A_1 \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}\right) + \phi_1^0} A_1 \sqrt{\kappa_1}.$$

Заметим, что при $1 > \phi_1^0 > \phi_2^0 > 0$

$$F(0) = \frac{1+\phi_1^0}{\phi_1^0}(\phi_2^0 - \phi_1^0)\sqrt{\kappa_2} < 0, \quad F(+\infty) = +\infty,$$

т.е. функция $F(c)$ меняет знак. Поэтому на интервале $(0, \infty)$ имеется хотя бы один корень уравнения (15). Таким образом
справедливо следующее утверждение

Теорема. Пусть выполнены следующие условия на начальные данные задачи (9)–(14):

$$l(0) = 0, \quad \phi_i(x,0) = \phi_i^0 = const, \quad i = 1,2,$$

$$\phi_1(0,t) = \phi_1^0 = const, \quad \phi_2(\infty,t) = \phi_2^0,$$

$$0 < \phi_2^0 < \phi_1^0 < 1.$$

Тогда существует хотя бы одно классическое автомодельное решение задачи (9)–(14), которое обладает свойством $0 < m_0 \le \varphi_i \le M_0 < 1$, $i = 1,2$.

Заключение. В работе получено точное автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.

Библиографический список

1. Веригин Н.Н. О фильтрации растворов и эмульсий в пористой среде // 2–й Всесоюзный съезд по теор. и прикл. мех.: Аннот. докл. – М.: Наука, 1964. – С. 50.
2. Папин А.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия АлтГУ. – 2016. – № 1 (89). – С. 152–156.
3. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. 1998. Vol. 11.
4. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.
5. Fowler A. Mathematical Geoscience. Springer-Verlag. London, 2011.
6. Ахмерова И.Г. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2012. – Т. 5. – № 1. – С. 25–35.
7. Simpson G., Spiegelman M., Weinstein M.I. Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics // Nonlinearity. – 2007. – Vol. 20.
8. Шишмарев К.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Труды молодых ученых Алтайского государственного университета. – 2011. – № 8. – С. 126–128.
9. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия АлтГУ, Барнаул, 2014, Вып. 1/2 (85).
10. Папин А.А., Сибин А.Н. Проблемы математического моделирования внутренней суффозии грунта : препринт №1/15. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. – 33 с.

УДК 517.95, 532.546

Аналитическое и численное исследование задачи фильтрации в пороупругой среде

М.А. Токарева, Р.А. Вирц
АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде. В основе математической модели лежит квазилинейная система уравнений составного типа, описывающая нестационарное движение сжимаемой жидкости в пороупругой среде при отсутствии фазовых переходов. Особенностью рассматриваемой в работе модели движения вязкой жидкости в сжимаемой твердой среде является использование закона Дарси вместо уравнения импульса для жидкой фазы, и реологическое соотношение, связывающее дивергенцию скорости твердой фазы и эффективное давление.

1. Введение

При моделировании процессов фильтрации в пористых средах естественной необходимостью является учет деформации твердого скелета. Некоторые аналитические и численные результаты для моделей, учитывающих движение твердой среды получены в работах [1–3]. Математическая модель, исследуемая в данной работе, позволяет учесть сжимаемость твердой среды и его пороупругие свойства. Для случая вязкоупругой среды доказана теорема существования и единственности автомодельного решения задачи. В случае преобладания упругих свойств система уравнений при переходе к переменным Лагранжа сводится к вырождающемуся на решении параболическому уравнению для пористости. Для устанавления свойства конечной скорости стабилизации решения при малом коэффициенте объемной сжимаемости твердой среды используется метод интегральных энергетических оценок. В частном случае, когда упругие свойства деформации являются преобладающими, получен интеграл решения и проведено численное исследование задачи в этом случае. Результаты вычислений представлены в виде графиков. Другой подход к моделированию деформации используется в работе [4].

2. Постановка задачи

В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа [5–8]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) = 0, \quad \frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + div(\rho_f\phi\vec{v}_f) = 0,$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}),$$

$$\nabla\cdot\vec{v}_s = -\frac{\phi^m}{\eta}p_e - \phi^b\beta_\phi\frac{dp_e}{dt}, p_e = (1-\phi)(p_s - p_f),$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g}, p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s; \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s.$$

Данная квазилинейная система описывает нестационарное изотермическое движение жидкости в вязкоупругой среде. Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_s, \vec{v}_f$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз; ϕ – пористость; p_f, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, p_{tot} – общее давление, p_e – эффективное давление, ρ_{tot} – средняя плотность среды; $\vec{g} = (0,0,-g)$ – плотность массовых сил; k – проницаемость, μ – динамическая вязкость жидкости ; η, β_ϕ, b, m – параметры пороупругой среды; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_s\cdot\nabla$ – материальная производная, $(\vec{x}, t) \in Q_T = \Omega\times(0,T)$ – переменные Эйлера. Истинные плотности твердой и жидкой фаз (ρ_s и ρ_f) принимаются постоянными. Искомыми являются величины $\phi, \vec{v}_s, \vec{v}_f, p_f, p_s$.

Результаты разрешимости начально-краевых задач для данной системы уравнений в одномерном случае при заданном общем давлении изложены в [9]. В работах [10, 11] модель использовалась для описания процесса фильтрации в тонком пороупругом слое льда. Другие аналитические результаты для подобных моделей были получены в работах [12, 13].

3. Разрешимость автомодельной задачи

Для искомой системы рассматривается автомодельное решение типа «бегущей волны». Полагая, что все искомые функции зависят лишь от переменной $\xi = x - ct$ (c – постоянный параметр), приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{d\xi}((-c + v_f)\phi) = 0, \ \frac{d}{d\xi}((1-\phi)(v_s - c)) = 0, \tag{1}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -\alpha\phi^n\left(\frac{dp_f}{d\xi} + \rho_f g\right), \tag{2}$$

$$\lambda\frac{dv_s}{d\xi} = -\phi^m(p_{tot} - p_f) - \phi^b(v_s - c)\frac{d(p_{tot} - p_f)}{d\xi}, \tag{3}$$

$$\frac{dp_{tot}}{d\xi} = -\big(\phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s\big)g, \tag{4}$$

где $\alpha = \frac{kG\rho}{\mu V}$ и $\lambda = \frac{1}{P\beta_\phi}$ – безразмерные константы.

Система рассматривается при $\xi > 0$ и дополняется граничными условиями:

$$v_s(0) = v_s^0, v_f(0) = v_f^0, \phi(0) = \phi^0, \lim_{\xi\to\infty} v_s(\xi) = u^+;$$
$$\lim_{\xi\to\infty} v_f(\xi) = u^+, \lim_{\xi\to\infty} \phi(\xi) = \phi^+; \tag{5}$$

где $v_s^0, v_f^0, \phi^0, \phi^+$ – заданные постоянные,удовлетворяющие условиям $\phi^0 \neq \phi^+, v_s^0 \neq v_f^0$.

Определение 1. Классическим автомодельным решением задачи (1)–(5) называется совокупность функции $(\phi(\xi), v_i(\xi), p_i(\xi)), i = s, f$, если они обладают непрерывными производными, входящими в уравнения (1)–(4), удовлетворяют этим уравнениям и граничным условиям (5) как непрерывные в $\bar{Q}_T$ функции. Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1 [13]. Пусть выполнены следующие условия: $g = 0, \phi^0 > \phi^+$, $(\phi^0, \phi^+) \in (0,1)$. Тогда существует единственное классическое автомодельное решение $(\phi(\xi), v_i(\xi), p_i(\xi)), i = s, f$ задачи (1)–(5) [13].

4. Локализация решений вырождающегося уравнения

В одномерном случае математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде с преобладанием упругих свойств относительно свойств вязкости и малом коэффициенте объемной сжимаемости твердой среды, записанная в переменных Лагранжа, сводится к одному уравнению для $s = \dfrac{\phi}{1-\phi}$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(d(s)\frac{\partial s}{\partial x} + f(s)\right), \tag{6}$$

причем предполагается, что существует постоянная M > 0 такая, что справедливы следующие оценки

$$0 \le s \le M < \infty, \ \frac{k}{\mu\beta_\phi} s^{n-b}(1+M)^{b-n-2} \le d(s) \le \frac{k}{\mu\beta_\phi} s^{n-b}, \quad g \ge 0,$$

$$| f(s) | \le \frac{k}{\mu} s^n g(\rho_s + (1+2M)\rho_f).$$

Определение 2. Неотрицательная ограниченная измеримая функция $s(x,t)$ $(0 \le s(x,t) \le M)$, определенная в $\Omega \times (0,\infty)$, есть слабое решение уравнения (6) с начальным условием $s_0(x)$, если для $\forall T > 0$ и любого открытого подмножества $\Omega_1 \subset R^1$ выполняются следующие предположения:

$$s \in L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial}{\partial x}(s^{n-b+1}) \in L_2[(0,T)\times\Omega_1], \quad (7) \ \lim_{t\to 0}\int_Q s dx = \int_Q s_0 dx \ (8)$$

и для $\forall \varphi(x,t) \in \overset{o}{C}{}^\infty((0,T)\times\Omega_1)$

$$\int_0^\infty\int_\Omega [d(s)\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f(s)}{\partial x}\varphi] dx dt = \int_0^\infty\int_\Omega s\frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_\Omega s(x,0)\varphi(x,0)dx. \tag{9}$$

Введем обозначения $A(\rho,t) \equiv \int\limits_{K_\rho(x_0)} s^2(x,t)dx, \quad B(\rho,t) \equiv \int\limits_{K_\rho(x_0)} s^{n-b}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx,$ и без ограничения общности будем считать $x_0 = 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (7)–(9) и дополнительно $t \in [0,T], \quad T \le T^*$, где

$$T^* \le min(4M^{2-b-n}F_1^{-2}(min(1, \frac{k}{\mu\beta_\phi}(1+M)^{b-n-2} - \frac{1}{2}))^2,$$

$$((\rho_0^{1+2\delta} - \rho^{1+2\delta})\frac{(2\theta-1)\mu\beta_\phi}{(2\delta+1)4kK_i^2} w^{1-2\theta}(\rho_0,t))^{\frac{1}{1-\theta}}), i = 1,2.$$

Если $s(x,t)$ – слабое решение (6) и $s_0(x) = 0$ в $K_{\rho_0}(x_0)$, $0 < \rho_0 < dist(x_0, \partial G)$, то $s(x,t) = 0$ почти всюду в $K_{\rho_1(t)}(x_0)$ при $0 \le t \le T \le T^*$. Причем $\rho_1(t) = (\rho_0^{1+2\delta} - Lt^{1-\theta}(w(\rho_0,t))^{2\theta-1})^{\frac{1}{1+2\delta}}$, где при $0 < n-b < 2$ $L = 4C_1^2 \cdot Q(r), \quad r \in (1,2)$, а при $n-b = 2$ $L = 4C_2^2 \cdot Q(r), \quad r = \dfrac{4}{n-b+2} = 1$.

В обоих случаях здесь

$$w(\rho_0,t) = \sup_{0\le\tau\le t}\int_0^\tau B(\rho_0,s)ds, \quad Q(r) = \frac{2\delta+1}{2\theta-1}(\frac{1}{2}\rho_0^\delta + T^{\frac{1}{2}}M^{2(\delta-1)}\rho_0^{\delta-1})^{2\theta}\left(\frac{k}{\mu\beta_\phi}\right)^2,$$

$$K_i = C_i[\frac{1}{2}\rho_0^{\ \delta} + T^{\frac{1}{2}}\rho_0^{\ \delta-1}M^{2(\delta-1)}]^\theta, \quad i = 1,2, \quad F_1 = \frac{kng}{\mu}(\rho_s + (1+2M)\rho_f).$$

Теорема 3. Пусть дополнительно к условиям теоремы 1 выполнены следующие условия:

$$\int_0^t B(\rho,\tau)d\tau \le C_0, \quad \int\limits_{K_\rho(x_0)} s_0^2(x)dx \le K_3(\rho-\rho_0)^{\frac{2+r}{2-r}}, \quad \forall \rho \in (\rho_0, R).$$

Тогда существует T_0, зависящее от данных задачи, такое, что $s(x,t) = 0$ при почти всех $x \in K_{\rho_0}(x_0)$, и $t \in [0, T_0]$.

5. Численные результаты

В качестве примера рассмотрим случай, когда твердая среда обладает преимущественно упругими свойствами относительно вязких. В этом случае порядок коэффициента вязкости среды η намного больше порядков остальных коэффициентов, входящих в уравнение типа Максвелла, и, следовательно, первым слагаемым в правой части уравнения (3) можно пренебречь. Реологическое соотношение в этом случае записывается в автомодельных переменных в виде

$$\lambda \frac{dv_s}{d\xi} = -\phi^b (v_s - c) \frac{d(p_{tot} - p_f)}{d\xi}.$$

Тогда система уравнений (1)–(4) сводится к следующему уравнению для ϕ:

$$\alpha\lambda \frac{d\phi}{d\xi} = \phi^{b-n}(A_2\phi - A_1(1-\phi)).$$

При начальных условия $\phi^0 = 3/4$, $\phi^+ = 1/2$ получим уравнение:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{3}{8}(1 - 2\phi)\phi^{-2.5}$$

Результаты вычислений для пористости представлены на рисунке 1.

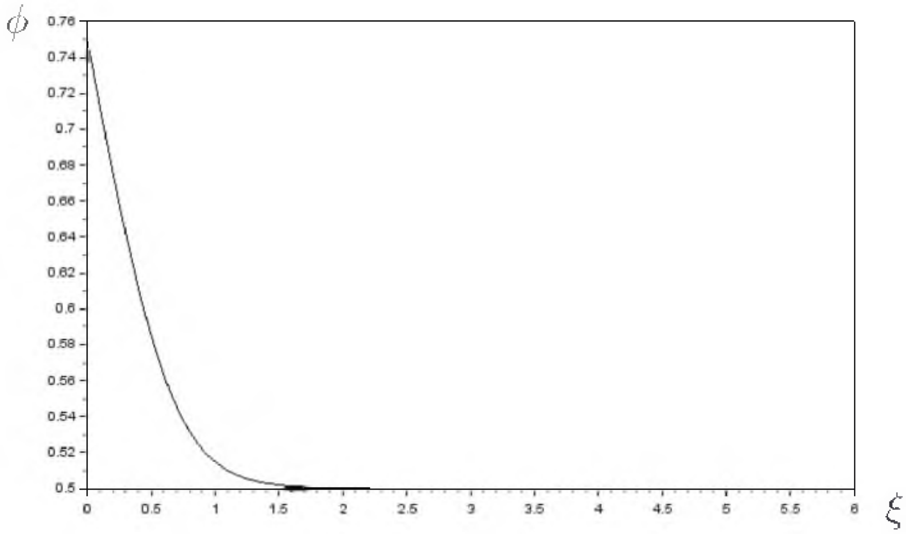

Рисунок 1 – График изменения пористости

Изменения скоростей и давлений представлены на рисунках 2 и 3 соответственно ($v_f(0) = 2$, $v_s(0) = 1$, $p_f(0) = 1$, $p_s(0) = 1$).

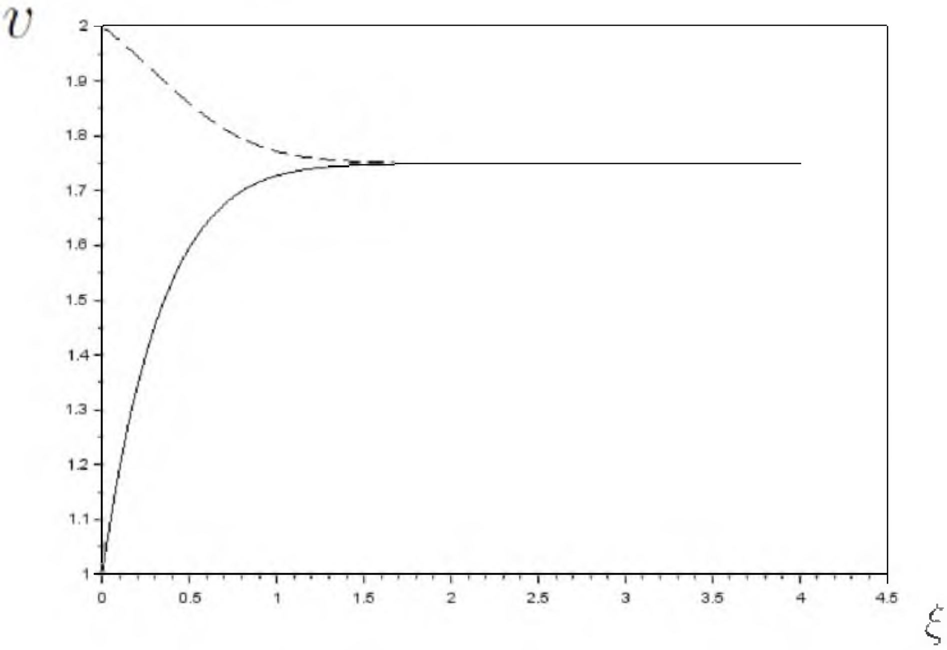

Рисунок 2 – График изменения скорости жидкой фазы – штриховая линия, и твердой среды – сплошная линия

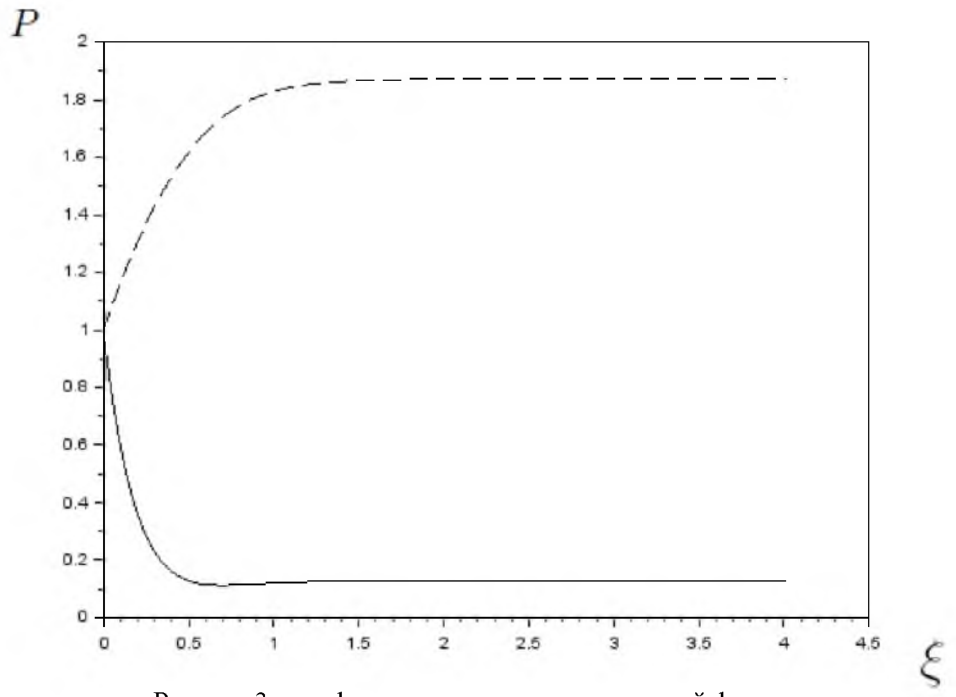

Рисунок 3 – график изменения давления жидкой фазы – штриховая линия, и твердой среды – сплошная линия

6. Выводы

В данной работе приведена теорема о существовании и единственности классического автомодельного решения задачи, установлены свойства локализкации решений вырождающегося уравнения, проведено численное исследование частного случая автомодельной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №01201460959 и гранта РФФИ №16-08-00291.

Библиографический список

1. Шишмарев К.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Труды молодых ученых АлтГУ. – 2011. – №8.

2. Папин А.А. Существование решения в «целом» уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси.

2. Результаты о разрешимости // Сиб. журн. индустр. математики. –Новосибирск, – 2006. – №3(27), т. 9. – С. 111–123.

3. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия Алтайского государственного университета. – 2014. – № 1/2. – С. 41–44.

4. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия Алтайского государственного университета. 2012. № 1/2. – С. 55–59.

5. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta, 11, (1998), 55-84.

6. Fowler A. C., Yang X. Pressure solution and viscous compaction in sedimentary basins // Journal of Geophysical Research. Vol. 104, N. B6, 12,989-12,997, 1999.

7. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М., 1971.

8. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. Elsevier, New York, 1972.

9. Ахмерова И.Г., Папин А.А., Токарева М.А. Математические модели механики неоднородных сред: учебное пособие – Барнаул, 2012. – Ч. I.

10.Токарева М.А. Двумерная задача фильтрации в тонком пороупругом слое // Известия АГУ. – 2013. Вып. 1/1 (77).– С. 60–62.

11. Папин А.А., Токарева М.А., Шишмарев К.А. Математические вопросы динамики ледового покрова // Вестник алтайской науки. – 2015. – Вып. 1 (23). – С. 161–171.

12. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic medium // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2015. –Т. 8, № 4. – С. 467–477.

13. Токарева М.А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Т. 2, № 1. – С. 153–157.

14. Токарева М.А., Вирц Р.А. Автомодельная задача фильтрации в пороупругой среде // Ломоносовские чтения на Алтае : материалы международной школы-семинара. – Барнаул, 2015.