

Численное исследование задачи о напряженно-деформированном состоянии упругой области с двумя круговыми отверстиями

А.В. Устюжанова
АлтГУ, г. Барнаул

В массивах горных пород, грунтах, сыпучих средах встречаются различные геологические нарушения, трещины и пустоты, которые влияют на формирование напряженно-деформированное состояние материала и могут привести к дальнейшему разрушению и обрушению. Исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности систем отверстий аналитическими и численными методами достаточно широко представлены разными авторами [1–3]. Такие задачи являются актуальными и находят практическое применение для расчета прочности и безопасности строительных конструкций, а также для прогнозирования появления и распространения трещин в окрестности протяженных горных выработок, скважин, туннелей.

В данной работе рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии упругой плоской области, ослабленной двумя круговыми отверстиями, находящейся в условиях сжатия.

Исследуемая плоская область представляет собой прямоугольник со сторонами, расположенными вдоль осей координат x_1, x_2 , и содержащий систему из двух круговых отверстий. В рамках плоской деформации требуется определить поля перемещений u_i ($i=1,2$) и напряжений σ_{ij} ($i, j=1,2$), которые при отсутствии массовых сил удовлетворяют уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}$$

Вне отверстий поведение упругого материала описывается законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm}),$$

где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости; по m проводится суммирование от 1 до 2.

Компоненты тензора деформаций ε_{ij} ($i, j=1,2$) записываются через перемещения u_i ($i=1,2$) с помощью соотношений:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2.$$

При реализации алгоритма численного решения поставленной задачи все величины считаются безразмерными. В качестве характерного линейного размера выбран горизонтальный размер прямоугольной области. Вертикальный размер области и радиусы круговых отверстий, отнесенные к горизонтальному размеру, равны соответственно H и a_k ($k=1,2$).

На внешней границе исследуемой области, то есть на сторонах прямоугольника, рассматриваются граничные условия для перемещений, обеспечивающие сжатие области:

$$\begin{aligned} u_1(0, x_2) &= \tilde{u}_1, \quad u_1(1, x_2) = -\tilde{u}_1, \\ u_2(x_1, 0) &= 0, \quad u_2(x_1, H) = -\tilde{u}_2, \end{aligned}$$

где $\tilde{u}_1 > 0$, $\tilde{u}_2 > 0$. При этом сами отверстия считаются свободными от напряжений:

$$\sigma_n = 0, \quad \sigma_\tau = 0,$$

где σ_n и σ_τ – нормальная и касательная составляющие векторов напряжений.

Алгоритм численного решения поставленной задачи основан на методе конечных элементов [4]. Прямоугольная область разбивается на треугольные конечные элементы. С учетом отверстий полученная сетка корректируется. На границах области задаются условия для перемещений. Применение метода конечных элементов к данной задаче сводится к решению системы алгебраических линейных уравнений $KU = F$, где K – глобальная матрица жесткости, U – вектор искомых узловых перемещений, а вектор правых частей F строится на основе известных данных. После определения узловых перемещений вычисляются деформации и напряжения в каждом конечном элементе. В результате полученных величин строятся изолинии полей напряжений в исследуемой области. Построен-

ный алгоритм численного решения позволяет получать результаты в зависимости от граничных условий, а также для разных форм отверстий и их взаимного расположения.

На рисунках 1–2 представлены изолинии максимального касательного напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}.$$

При расчетах параметры задачи были следующими: $\nu = 0.3$, $H = 1.02$, $\tilde{u}_1 = 0.001$, $\tilde{u}_2 = 0.01$. Отверстия на рисунках 1, 2 имеют одинаковые радиусы: $a_1 = a_2 = 0.0714$, а на рисунке 3 радиус одного из отверстий меньше другого: $a_1 = 0.0428$, $a_2 = 0.0714$.

Полученные результаты численных расчетов согласуются с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными [5]. В качестве критерия хрупкого разрушения можно рассматривать достижение максимальным касательным напряжением определенного значения (прочности при сдвиге).

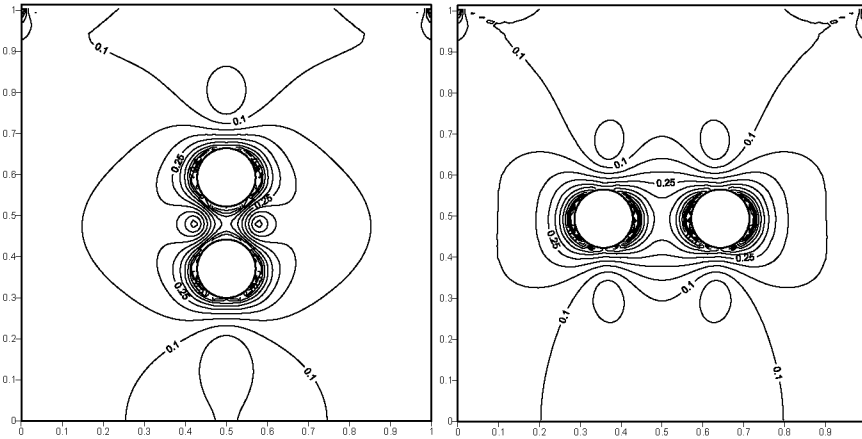


Рисунок 1 – Изолинии максимального касательного напряжения

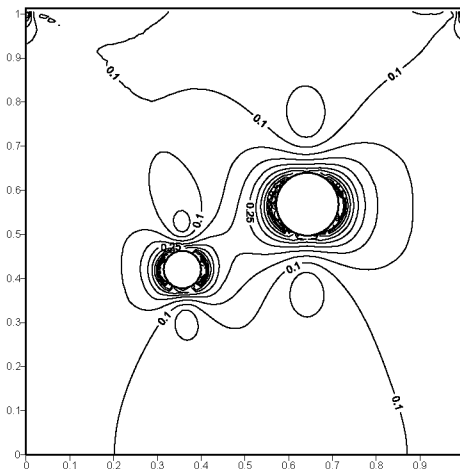


Рисунок 2 – Изолинии максимального касательного напряжения

В работах [6–7] при численном моделировании напряженно-деформированного состояния в окрестности систем круговых отверстий, предполагаемые трещины сдвига, рассмотрены в виде линий разреза. В частности, для области с двумя круговыми отверстиями, расположенными аналогично рисунку 2, но с одинаковыми диаметрами, продемонстрировано распространение трещин сдвига в направлении наибольшего изменения максимального касательного напряжения. При реализации численного решения для задач с возможными линиями сдвига используется конечно-элементная сетка с двойными узлами, которая позволяет описывать разрывы перемещений в исследуемой области. В процессе вычислений каждая расчетная точка может разделиться на два узла, перемещения в которых разные.

Реализованный алгоритм численного решения позволяет делать анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности отверстий и прогнозировать возникновение пластических областей или хрупкое разрушение материала при разных условиях на границе.

Библиографический список

1. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 352 с.
2. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1981. – 324 с.
3. Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф. Напряженное состояние породного массива вокруг выработки в условиях локализации сдвигов // ФТПРПИ. – 2002. – № 2. – С. 18–26.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 393 с.
5. Гольдштейн Р.В., Кулинич Ю.В. Осипенко Н.М. Разрушение горных пород вблизи отверстия при сжатии: препринт ИПМех РАН. – 2005. – № 778.
6. Бушманова О.П., Устюжанова А.В. О численном моделировании трещин сдвига вблизи отверстий // Математическое моделирование и краевые задачи: труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1. – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 81–83.
7. Бушманова О.П., Устюжанова А.В. О математическом моделировании сдвиговых трещин вблизи отверстий // Известия Алтайского госуд арственного университета. – Барнаул, 2010. – №1/2 (65). – С. 20–23.

УДК 532.135

Нахождение параметров реологической модели по результатам измерений соотношений нелинейной вязкоупругости

Н.А. Черпакова, О.А. Кондратьева
АлтГТУ, г. Барнаул

Модифицированная реологическая модель Виноградова – Покровского используется для описания вискозиметрических течений полимерных жидкостей [1–5]. Особенностью этой модели является учет тензорного характера коэффициента трения бусинок, который определен наведенной анизотропией сдвигового потока. Обобщение этой модели на многомодовый случай имеет вид [5]:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 3\sum_{\alpha=1}^n \frac{\eta_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} a_{ik}^{\alpha} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} a_{ik}^{\alpha} - v_{ij} a_{jk}^{\alpha} + \frac{1 + (\kappa_{\alpha} - \beta_{\alpha}) a_{ij}^{\alpha}}{\tau_{\alpha}} a_{jk}^{\alpha} = \frac{2}{3} \gamma_{ik} - \frac{3\beta_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} a_{ij}^{\alpha} a_{jk}^{\alpha}$$

Здесь – гидростатическое давление; σ_{ik} – тензор напряжений полимерной системы; v_{ik} – тензор градиентов скорости; $\gamma_{ik} = (v_{ik} + v_{ki})/2$ – симметризованный тензор градиентов скорости; α – порядковый номер моды; n – количество учитываемых релаксационных мод или процессов; a_{ik}^{α} – безразмерный тензор дополнительных напряжений, соответствующих вкладу с номером α ; η_{α} – коэффициент сдвиговой вязкости моды с номером α ; τ_{α} – время релаксации моды с номером α ; $\kappa_{\alpha} = \kappa_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha})$ и $\beta_{\alpha} = \beta_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha})$ – параметры наведенной анизотропии, определяемые выражениями

$$\beta_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha}) = \frac{f_{\alpha} + p_{\alpha} a_{ij}^{\alpha}}{1 + p_{\alpha} a_{ij}^{\alpha}} \quad \kappa_{\alpha}(x) = 1,2\beta_{\alpha}(x) \quad (2)$$

При работе с выражениями (2) изначально было сделано предположение [5], что значения параметров наведенной анизотропии не зависят или зависят незначительно от номера моды, однако, сравнение с экспериментами показало некорректность данного предположения, поэтому необходимо учитывать зависимость значений параметров наведенной анизотропии от номера моды.

В связи с тем, что влияние параметров наведенной анизотропии для каждой конкретной моды неодинаково, нужно рассматривать каждую моду в отдельности, что отражено при записи выражений (2). Таким образом, система уравнений (1, 2) определена с точностью до параметров: η_{α} , τ_{α} , f_{α} , p_{α} , q_{α} , которые подлежат определению из экспериментов. Число этих параметров достаточно велико, особенно при большом числе мод.

Для того чтобы подобрать значения параметров анизотропии были рассмотрены четыре вида ограниченных зависимостей параметров g_{α} и p_{α} от номера моды α , принимающие наибольшее значение В:

$$g_{\alpha} = \frac{B}{1 + (\alpha - \alpha_0)^2}; p_{\alpha} = \frac{P}{1 + (\alpha - \alpha_0)^2} \quad (3)$$