МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова, Е.А. Плотникова**

# ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

*Учебно-методическое пособие*

Барнаул
Издательство Алтайского
государственного университета
2018

**УДК 517(075.8)**
**ББК 22.16**
**С 147**

Рецензент – профессор кафедры дифференциальных уравнений АлтГУ,
д. ф. – м. н. ***А.Г. Петрова***

**Саженков, А.Н.**

С 147 Интегралы, зависящие от параметра [Текст] : учебно-методическое пособие / А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова, Е.А. Плотникова. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та. – 2018. – 32 с.

Учебно-методическое пособие предназначено студентам II курса факультета математики и информационных технологий и студентам технических специальностей, изучающим математический анализ. Объем материала соответствует шести учебным неделям при двух часовой аудиторной недельной нагрузке по практическим занятиям. Для каждого занятия в пособии приведен необходимый теоретический материал, иллюстрирующие примеры, сформулированы задачи на занятия и указаны номера из задачника [2] в качестве домашнего задания.

**УДК 517(075.8)**
**ББК 22.16**

СОДЕРЖАНИЕ

## Введение

Целью данного пособия является содействие активизации учебного процесса на практических занятиях по математическому анализу и самостоятельной работы студентов. Тем самым определена структура пособия.

В начале каждого раздела даётся сжатое теоретическое введение, содержащее основные определения, формулировки теорем и формулы. Затем приводится полное решение нескольких характерных задач. Далее сформулированы задачи для самостоятельного решения, аналогичные рассмотренным примерам с некоторыми особенностями.

Таким образом, прежде чем приступить к решению задач, следует основательно изучить теоретический материал, относящийся к рассматриваемой теме, и подробно разобрать предлагаемые примеры. Такой подход надлежащим образом вооружит Вас для самостоятельного решения предлагаемых далее задач, как на самом практическом занятии, так и при выполнении домашней работы.

Учебное пособие состоит из шести разделов. В пособии осуществляется сквозная нумерация теорем, а нумерация примеров, формул и определений в каждом разделе – индивидуальная. Каждый из разделов завершается формулировкой задач для аудиторного практического занятия и перечнем номеров из "Сборника задач и упражнений по математическому анализу" автора Б.П. Демидовича [2] для домашнего задания.

В данном пособии рассматриваются, как собственные интегралы, зависящие от параметра, так и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Для успешного освоения их свойств и применения в прикладных задачах, необходимы достаточно прочные знания по следующим темам математического анализа: дифференциальные и интегральные свойства функций многих переменных, однократные несобственные интегралы, функциональные последовательности и ряды.

Критерии и признаки (Вейерштрасса, Дирихле и Абеля) равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, во многом перекликаются с соответствующими фактами для функциональных рядов и однократных несобственных интегралов. Аналогично, и свойства непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости интегралов, зависящих от параметра, похожи на соответствующие свойства функциональных рядов.

В завершение работы над темой необходимо пройти испытание на степень освоенности материала темы. Для этой цели в конце пособия приведены контрольные вопросы по теме и примерное задание для практической самостоятельной работы. Эти вопросы и такие задачи представляют собой образцы заданий на экзамене или зачёте, в зависимости от того, какая форма отчётности предполагается по дисциплине, включающей в себя данную тему.

## 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра (непрерывность, дифференцируемость под знаком интеграла)

Пусть $Y$ – некоторое множество действительных чисел; $a(y), b(y)$ – функции, определенные на $Y$; $a(y) \le b(y)$; функция $f(x,y)$ определена на множестве

$$\{(x,y): y \in Y, a(y) \le x \le b(y)\}.$$

Интегралы вида

$$F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

называются интегралами, зависящими от параметра, а переменная $y$ – параметром. Когда функции $a(y), b(y)$ постоянны, интеграл, зависящий от параметра, имеет следующий вид:

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

**Теорема 1.** Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $\Pi = \{(x,y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, то $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ представляет собой функцию, непрерывную на отрезке $[c,d]$.

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в указанном прямоугольнике, а кривые $x = a(y)$, $x = b(y)$, $y \in [c,d]$ непрерывны и не выходят за пределы прямоугольника, то интеграл

$$F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx.$$

является непрерывной функцией на отрезке $[c,d]$.

**Теорема 2.** При условиях теоремы 1 справедливы формулы:

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx,$$

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx.$$

Если функция $f(x,y)$ при фиксированном $y$ непрерывна по $x \in [a,b]$ и при $y \to y_0$, $y_0 \in (c,d)$ стремится к предельной функции $g(x)$ равномерно относительно $x$, то

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

**Теорема 3** (правило Лейбница). Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, то функция $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и $\dfrac{dF(y)}{dy}=\int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$.

**Пример 1.** Найти: 1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$;

2) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int\limits_1^2 \dfrac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}dx$.

*Решение*. 1) так как функции $\alpha$, $1+\alpha$, $\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ непрерывны (при всех $x$ и $\alpha$), то по теореме 2 возможен предельный переход по $\alpha$ под знаком интеграла. Имеем: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

2) так как функция $\dfrac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}$ при фиксированном $\alpha$ $(|\alpha|>1)$ непрерывна по $x$ $(1\le x\le 2)$ и $f(x,\alpha)=\dfrac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}\to\dfrac{1}{2}$, когда $\alpha\to\infty$, равномерно относительно $x$, получаем:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_1^2 \frac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}dx=\int_1^2 \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}dx=\frac{1}{2}.$$

Равномерная сходимость функции $f(x,y)$ вытекает из следующих оценок:

$$\left|\frac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\ln\left(1+\dfrac{2x|\alpha|}{x^2+\alpha^2}\right)}{2\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}\right|\le\frac{x|\alpha|}{\left(x^2+\alpha^2\right)\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}\le$$

$$\le\frac{2|\alpha|}{\left(1+\alpha^2\right)\ln\left(1+\alpha^2\right)}\le\frac{1}{\ln\left(1+\alpha^2\right)}<\varepsilon,\ (\varepsilon>0)$$

сразу для всех $x\in[1,2]$, как только $|\alpha|>\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}$.

**Пример 2.** Найти наименьшее значение функции

$$I(a,b)=\int_1^3\left(a+bx-x^2\right)^2dx.$$

*Решение*. Необходимое условие экстремума функции $I(a,b)$:

$$I'_a=0,\ I'_b=0.$$

Так как подынтегральная функция имеет непрерывные частные производные при любых $a$ и $b$, то можно применять формулу Лейбница:

$$I'_a=2\int_1^3\left(a+bx-x^2\right)dx=4a+8b-\frac{52}{3}=0,$$

$$I'_b=2\int_1^3\left(a+bx-x^2\right)xdx=8a+\frac{52}{3}b-40=0.$$

Отсюда находим: $a=-\dfrac{11}{3};\ b=4$.

$d^2I>0$ – достаточное условие минимума функции $I(a,b)$.

Применяя формулу Лейбница во второй раз, получаем $I''_{a^2}=4;\ I''_{b^2}=\dfrac{52}{3};$ $I''_{ab}=8$. Тогда $d^2I=4dx^2+16dxdy+\dfrac{52}{3}dy^2=4(dx+2dy)^2+\dfrac{4}{3}dy^2>0$. Таким образом, при $a=-\dfrac{11}{3},\ b=4$ функция $I(a,b)$ принимает минимальное значение.

**Пример 3.** Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл:

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)dx.$$

*Решение*. Пусть $|a|\ge a_0>0,\ |b|\ge b_0>0$. Тогда подынтегральная функция $f(a,x)$ и ее производная $f'_a(a,x)$ непрерывны в $R=\left\{|a|\ge a_0>0;\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$. Следовательно, дифференцирование по параметру $a$ под знаком интеграла законно. Имеем:

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{2|a|\operatorname{sgn}a\cdot\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx.$$

Полагая здесь $t=\operatorname{ctg}x$, получаем:

$$I'(a)=2|a|\operatorname{sgn}a\cdot\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(a^2+b^2t^2\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{\pi\operatorname{sgn}a}{|a|+|b|}.$$

Отсюда интегрированием по $a$ находим:

$$I(a)=\pi\ln(|a|+|b|)+C.$$

Используя очевидное равенство

$$I(b) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(b^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\right) dx = \pi \ln |b|$$

и полагая $a = b$, получаем: $C = -\pi \ln 2$. Таким образом,

$$I(a) = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}.$$

Поскольку числа $a_0$ и $b_0$ могут быть как угодно малыми, то полученный результат справедлив при любых $ab \neq 0$. Если же один из параметров равен нулю (например, $b = 0$), то данный интеграл существует лишь как несобственный, и у нас нет оснований считать ответ верным и в этом случае. Поэтому

$$I(a,0) = 2\int_0^{\pi/2} \ln(|a| \sin x) dx = \pi \ln |a| + 2\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \pi \ln \frac{|a|}{2}$$

находим индивидуально.

**Пример 4.** Вычислить производные функций

$$I_1(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx, \; I_2(y) = \int_0^1 \ln\left(x^2 + y^2\right) dx.$$

*Решение.* При $y > 0$

$$I_1'(y) = -\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1 + y^2}, \; I_2'(y) = \int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2} dx = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{y}$$

по формуле Лейбница.

Посмотрим, как обстоит дело при $y = 0$. Если положить $I_1(0) = \dfrac{\pi}{2}$, сохранится непрерывность $I_1(y)$ при $y = 0$. Но, вычисляя непосредственно, имеем $\dfrac{I_1(y) - I_1(0)}{y} = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{y^2}{1 + y^2} - \dfrac{\operatorname{arctg} y}{y} \to -\infty$ при $y \to 0$. Так что конечной производной при $y = 0$ не существует.

Аналогично рассмотрим

$$I_2(0) = -2, \; \frac{I_2(y) - I_2(0)}{y} = \frac{\ln(1 + y^2)}{y} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \to \pi \text{ при } y \to 0.$$

Между тем производная подынтегральной функции при $y = 0$ равна нулю, так что и интеграл равен нулю.

Правило Лейбница при $y = 0$ в этих примерах не приложимо.

## Занятие 1

1. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$, $\lim\limits_{R \to \infty} \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin x} dx$.

2. Можно ли совершить предельный переход под знаком интеграла в выражении $\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx$?
3. Получить приближенную форму вида: $\sqrt{1+x^2}\approx a+bx$ $(0\le x\le 1)$ из условия, что среднее квадратичное отклонение функций $a+bx$ и $\sqrt{1+x^2}$ на данном промежутке [0,1] является минимальным.
4. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующий интеграл: $J(a)=\int_0^{n/2}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1)$.
5. Найти $I'(\alpha)$, если $I(\alpha)=\int_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}dx$ $(\alpha>0)$,

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{dx}{\left(x^2+\alpha^2\right)^n}\quad (\alpha\ne 0;\ n=2,3,4,...).$$

**Домашнее задание:** № 3713(в), 3714, 3716, 3733, 3734.

## 2. Собственные интегралы, зависящие от параметра, с переменными пределами интегрирования

**Теорема 4** (формула Лейбница). Если пределы интегрирования являются дифференцируемыми функциями $a(y)$, $b(y)$, $a<a(y)<b$, $a<b(y)<b$ при $c<y<d$ и выполнены условия теоремы 3, то справедлива формула:

$$\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = f(b(y),y)b'(y)-f(a(y),y)a'(y)+\int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx.$$

**Теорема 5.** Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $\Pi=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, то

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

**Пример 1.** Найти $F'(a)$, если $F(a)=\int_o^a f(x+a,x-a)dx$.

*Решение*. Обозначим $u=x+a$, $v=x-a$. Если существуют непрерывные частные производные функции $f(u,v)$, то по формуле Лейбница имеем:

$$F'(a)=f(2a,0)+\int_0^a\left(f'_u(u,v)-f'_v(u,v)\right)dx.$$

Замечая, что $f'_x=f'_u+f'_v$, можем записать:

$$\int_0^a \left( f'_u - f'_v \right) dx = 2\int_0^a f'_u dx - f(2a,0) + f(a,-a).$$

Тогда $F'(a) = f(a,-a) + 2\int_0^a f'_u dx$.

**Пример 2.** Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0,\ b > 0).$$

*Решение*. Замечаем, что $\dfrac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$ непрерывна в прямоугольнике $\Pi = \left\{(x,y): 0 \le x \le 1,\ a \le y \le b\right\}$, поэтому, согласно теореме 5, получаем:

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

**Пример 3.** Пусть $I(\alpha) = \int_0^\alpha \dfrac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha - x}}$, где $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ непрерывны на $[0;a]$. Доказать, что при $o < \alpha < a$

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}} dx.$$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$F(\alpha,\varepsilon) = \int_0^{\alpha-\varepsilon} \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha - x}} \quad (0 < \varepsilon \le \alpha \le a).$$

Полагая в нем $x = \alpha - t$, получим $F(\alpha,\varepsilon) = \int_\varepsilon^\alpha \dfrac{\varphi(\alpha - t)}{\sqrt{t}} dt$, в котором подынтегральная функция и ее производная по $\alpha$ непрерывны на множестве $[\varepsilon \le t \le \alpha;\ \varepsilon \le \alpha \le a]$.

По формуле Лейбница

$$F'_\alpha(\alpha,\varepsilon) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_\varepsilon^\alpha \frac{\varphi'_\alpha(\alpha - t)dx}{\sqrt{t}} dt = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\alpha-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\alpha - x}}.$$

Так как несобственный интеграл $A(\alpha) = \int_0^\alpha \dfrac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\alpha - x}}$ $(0 < \alpha < a)$ сходится, то $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} F'_\alpha(\alpha,\varepsilon) = \dfrac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + A(\alpha) = F'_\alpha(\alpha,0)$. С другой стороны, $F'_\alpha(\alpha,0) = I'(\alpha)$.

Таким образом,

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^{\alpha}\frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}dt \quad (0<\alpha<a).$$

### Занятие 2

1. Найти $F'(\alpha)$, если $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$.
2. Найти $F''(x)$, если $F(x)=\int\limits_a^b f(y)|x-y|dy$, где $a<b$ и $f(y)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция.
3. Найти $F'(a)$, если $F(a)=\int\limits_0^{a^2}dx\int\limits_{x-a}^{x+a}\sin\left(x^2+y^2-a^2\right)dy$.
4. Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируемая функция, $F(x)$ – дифференцируемая функция. Показать, что функция
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x-at)+f(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}F(z)dz$$
удовлетворяет уравнению колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(a\neq 0)$ и начальным условиям $u(x,0)=f(x)$, $u'_t(x,0)=F(x)$.
5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$.

**Домашнее задание:** № 3717, 3718(в), 3729, 3736, 3738(б).

## 3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов

**Определение 1.** Для заданной в полуполосе $\Pi_\infty=\{(x,y): a\le x<+\infty,\ \alpha<y<\beta\}$ функции $f(x,y)$, интегрируемой по $x$ в несобственном смысле на полупрямой $a\le x<+\infty$ при любом фиксированном $y$ из $(\alpha;\beta)$,

$$I(y)=\int\limits_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

называется несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра $y$, сходящимся на $(\alpha;\beta)$.

Например, несобственный интеграл, зависящий от параметра $y$, $I(y)=\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{y}x}$, где $a > 1$, определён при $y>1$ и расходится при $y\le 1$. Это устанавливается справедливостью следующего равенства

$$\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{y}x}=\int\limits_{\ln a}^{+\infty}\frac{du}{u^{y}}\quad (\textit{замена переменной } u=\ln x).$$

**Определение 2.** Для функции $f(x,y)$, заданной в прямоугольнике $\Pi=\{(x,y): a\le x<b,\ \alpha<y<\beta\}$, интегрируемой в несобственном смысле по $[a;b)$ при любом фиксированном $y$ из $(\alpha;\beta)$,

$$I(y)=\int\limits_{a}^{b}f(x,y)dx$$

называется несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра $y$, сходящимся на $(\alpha;\beta)$.

Здесь точка $b$ является особой: $f(x,y)\to\infty$ при $x\to b-0$ и фиксированном $y$.

В теории несобственных интегралов, зависящих от параметра, важную роль играет понятие равномерной сходимости.

**Определение равномерной сходимости.** Сходящийся на $(\alpha;\beta)$ несобственный интеграл:

$$\int\limits_{a}^{+\infty}f(x,y)dx,$$

где функция $f(x,y)$ определена в области

$$\Pi_{\infty}=\{(x,y): a\le x<+\infty,\ \alpha<y<\beta\},$$

называется равномерно сходящимся на интервале $(\alpha,\beta)$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists B=B(\varepsilon)$ такое, что $\forall b\ge B$ выполняется $\left|\int\limits_{b}^{+\infty}f(x,y)dx\right|<\varepsilon$ при всех $y\in(\alpha,\beta)$ сразу.

*Замечание.* Если интеграл сходится равномерно на интервале $(\alpha,\beta)$ и $f(x,y)$ непрерывна, то интеграл представляет собой непрерывную функцию параметра $y$ в этом интервале.

**Критерий Коши.** Для того чтобы интеграл сходился равномерно на интервале $(\alpha,\beta)$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists B=B(\varepsilon)$ такое, что $\forall y\in(\alpha,\beta)$ выполняется $\left|\int\limits_{b'}^{b''}f(x,y)dx\right|<\varepsilon$, как только $b''>b'>B(\varepsilon)$.

**Признак Вейерштрасса.** Для того чтобы интеграл сходился равномерно и абсолютно на интервале $(\alpha,\beta)$, достаточно, чтобы существовала не зависящая от параметра $y$ мажорирующая функция $F(x)$ такая, что $|f(x,y)|\le F(x)$ при $a\le x<+\infty$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x)dx$ сходился.

*Замечание.* Для несобственных интегралов второго рода аналогично формулируются определение равномерной сходимости, критерий Коши и признак Вейерштрасса.

**Признак Абеля.** Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно относительно $y$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, если

1) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно относительно $y$ на $[\alpha,\beta]$;
2) функция $g(x,y)$ равномерно ограничена и монотонна по $x$. $|g(x,y)|\le L$ $(L=\text{const},\ x\ge a,\ y\in[\alpha,\beta])$.

**Признак Дирихле.** Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно относительно $y$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, если

1) первообразная $\int\limits_a^{x} f(t,y)dt$ равномерно ограничена $\left|\int\limits_a^{x} f(t,y)dt\right|\le K$ $(K=\text{const},\ x\ge a,\ y\in[\alpha,\beta])$;
2) функция $g(x,y)\to 0$ при $x\to\infty$, равномерно относительно $y\in[\alpha,\beta]$ и монотонна по $x$.

**Пример 1.** Сформулируем в положительном смысле, что означает неравномерная сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ в заданном интервале $(\alpha,\beta)$.

*Решение.* Несобственный интеграл, зависящий от параметра, должен сходиться при каждом фиксированном значении $y\in(\alpha,\beta)$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B(\varepsilon,y)>0 \text{ такое, что } \forall b\ge B\ \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon.$$

Сходимость не является равномерной, если $\exists\varepsilon>0$ такое, что $\forall B=B(\varepsilon)\ \exists b\ge B$, для которого $\exists y\in(\alpha,\beta)$ $\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|\ge\varepsilon$.

**Пример 2.** Доказать расходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx$ при $\alpha\le 1$.

*Доказательство.* Пусть $b \in (1;+\infty)$; выберем натуральное число $n$ так, чтобы выполнялось неравенство $\pi n > b$ и положим $b_1 = \pi n$ и $b_2 = 2\pi n$. Тогда

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx\right| = \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \ge \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 x dx = \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}.$$

Итак, существует число $\varepsilon = 1/4$, такое, что для любого $b > 1$ существуют числа $b_1 = \pi n > b$ и $b_2 = 2\pi n > b$, для которых

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx\right| \ge \varepsilon .$$

Следовательно, при $\alpha \le 1$ данный интеграл расходится.

**Пример 3.** Определить область сходимости интеграла

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx .$$

*Решение.* Положим $p \ge q$ (для определенности).

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} \cdot \frac{dx}{1 + x^{q-p}} .$$

Данный интеграл сходится по признаку Абеля при $p > 1$ (т.е. при $\max(p,q) > 1$). Действительно,

а) функция $\dfrac{1}{1+x^{q-p}}$ монотонна и ограничена при $x > \pi$;

б) интеграл $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} dx$ сходится по признаку Дирихле при $p > 1$, так как функция $\dfrac{1}{x^{p-1}}$ монотонно стремится к нулю при $p > 1$ и $x \to +\infty$, а функция $\cos x$ имеет ограниченную первообразную $\displaystyle\sin x = \int_{\pi}^{x} \cos t dt$.

Покажем, что условие $\max(p,q) > 1$ является необходимым. Представим интеграл в виде ряда:

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1} + x^{q-1}} dx = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos x}{x^{p-1} + x^{q-1}} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2}(2n+1)}^{\frac{\pi}{2}(2n+3)} \frac{\cos x}{x^{p-1} + x^{q-1}} dx .$$

Воспользуемся теоремой о среднем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{2}(2n+1)}^{\frac{\pi}{2}(2n+3)}\frac{\cos x}{x^{p-1}+x^{q-1}}dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\xi_n^{p-1}+\xi_n^{q-1}}\text{, где }\frac{\pi}{2}(2n+1)\le\xi_n\le\frac{\pi}{2}(2n+3).$$

Необходимое условие сходимости ряда приводит к условию $\max(p,q)>1$.

**Пример 4.** Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ в следующих промежутках: а) $1<\alpha_0\le\alpha<+\infty$; б) $1<\alpha<+\infty$.

*Решение.* а) при $1<\alpha_0\le\alpha<+\infty$ имеем $\frac{1}{x^\alpha}\le\frac{1}{x^{\alpha_o}}$, если $1\le x\le+\infty$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha_0}}$ сходится. Применяя признак Вейерштрасса, получаем равномерную сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ на данном множестве;

б) при $1<\alpha<+\infty$ $\int\limits_B^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1}$. Но $\lim\limits_{\alpha\to1+0}\frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1}=+\infty$, тогда $\forall B>0$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\alpha>1$ такое, что $\int\limits_B^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}>\varepsilon$. Следовательно, интеграл сходится неравномерно.

**Пример 5.** Исследовать на равномерную сходимость при $\alpha\ge0$ $\int\limits_0^{+\infty}e^{-kx}\cos\alpha x dx$, где $k>0$.

*Решение.* При $x\in[0;+\infty)$ справедливо неравенство $\left|e^{-kx}\cos\alpha x\right|\le e^{-kx}$, а $\int\limits_0^{+\infty}e^{-kx}dx$ сходится и не зависит от $\alpha$. В силу признака Вейерштрасса исходный интеграл сходится равномерно на рассматриваемом множестве изменения $\alpha$.

**Пример 6.** Исследовать $\int\limits_0^1\frac{|\ln x|}{x^\alpha}dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$, на сходимость.

*Решение.* Рассмотрим сначала случай $\alpha<1$. Положим $\varepsilon=1-\alpha$, тогда $\varepsilon>0$. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{|\ln x|}{x^\alpha}=\frac{|\ln x|}{x^{1-\varepsilon}}=\frac{x^{\varepsilon/2}|\ln x|}{x^{1-\varepsilon/2}}.$$

При $x\to+0$ имеем $x^{\varepsilon/2}|\ln x|\to0$, поэтому существует такое $x_0$, что для всех $x\in(0;x_0)$ верно неравенство

$$x^{\varepsilon/2}|\ln x|<1.$$

Следовательно,

$$\frac{|\ln x|}{x^{\alpha}}<\frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}}, \quad x\in(0;x_0).$$

Поскольку $\int\limits_0^{x_0}\frac{dx}{x^{1-\varepsilon/2}}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и $\int\limits_0^{x_0}\frac{|\ln x|\,dx}{x^{\alpha}}$.

Поэтому сходится и данный интеграл, так как он представим в виде

$$\int\limits_0^1\frac{|\ln x|}{x^{\alpha}}dx=\int\limits_0^{x_0}\frac{|\ln x|}{x^{\alpha}}dx+\int\limits_{x_0}^1\frac{|\ln x|}{x^{\alpha}}dx,$$

т.е. в виде суммы двух интегралов, один из которых сходится, а другой является собственным интегралом. Таким образом, при $\alpha<1$ исходный интеграл сходится.

Пусть теперь $\alpha\geq1$. В этом случае для всех $x\in(0;1/e)$ верно неравенство $|\ln x|>1$ и, следовательно, неравенство

$$\frac{|\ln x|}{x^{\alpha}}>\frac{1}{x^{\alpha}}.$$

Применяя признак сравнения, получаем, что $\int\limits_0^{\frac{1}{e}}\frac{|\ln x|}{x^{\alpha}}dx$ расходится, а поэтому расходится и интеграл $\int\limits_0^1\frac{|\ln x|}{x^{\alpha}}dx$.

Итак, исходный интеграл сходится при всех $\alpha<1$ и расходится при всех $\alpha\geq1$.

## Занятие 3

1. Определить область сходимости $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}dx$; $\int\limits_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$, $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}$.
2. Доказать, что интеграл Дирихле $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$:

а) сходится равномерно на каждом отрезке $[a,b]$, не содержащем значения $\alpha=0$;

б) сходится неравномерно на каждом отрезке $[a,b]$, содержащем значение $\alpha=0$.

3. Исследовать на равномерную сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ $(-\infty<\alpha<+\infty)$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ при $a<\alpha<b$; при $-\infty<\alpha<+\infty$.

4. Исследовать на непрерывность функцию $F(\alpha)=\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} dx$, при $\alpha>0$.

**Домашнее задание**. № 3745, 3746, 3759, 3760, 3761, 3777, 3779.

## 4. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов

**Правило Лейбница.** Пусть

1) $f(x,y)$ определена и непрерывна по $x$ при $y\in[\alpha,\beta]$, $x\ge a$.

2) $\exists$ непрерывная по обеим переменным производная $f'_y(x,y)$;

3) $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится $\forall\ y\in[\alpha,\beta]$;

4) $\int\limits_{a}^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно относительно $y$ на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Тогда $\forall\ y\in[\alpha,\beta]$ $$\frac{d}{dy}\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_{a}^{+\infty} f'_y(x,y)dx.$$

**Теорема 6.** Пусть

1) $f(x,y)$ определена и непрерывна при $x\ge a$, $y\in[\alpha,\beta]$;

2) $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно относительно $y$ на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Тогда $\int\limits_{\alpha}^{\beta} dy\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_{a}^{+\infty} dx\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dy$.

**Теорема 7.** Пусть

1) $f(x,y)$ непрерывна при $x\ge a$, $y\ge\alpha$;

2) интегралы $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)dy$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx$ сходятся равномерно при $x\in[a,b]$ и $y\in[\alpha,\beta]$, соответственно, $\forall\ b,\beta$.

Тогда если хотя бы один из повторных интегралов
$$\int\limits_{a}^{+\infty} dx\int\limits_{\alpha}^{+\infty} |f(x,y)|dy,\ \int\limits_{\alpha}^{+\infty} dy\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x,y)|dx$$
сходится, то сходятся и равны между собой повторные интегралы:
$$\int\limits_{a}^{+\infty} dx\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)dy,\ \int\limits_{\alpha}^{+\infty} dy\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

**Формула Фруллани:**

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a} \qquad (a>0,\, b>0),$$

где $f(x)$ – непрерывная функция и $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ имеет смысл $\forall\ A>0$.

Эта формула очень облегчает вычисление широкого круга интегралов. Этот красивый теоретический факт имеет простое доказательство (см. [8]).

В случае интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ имеем: $f(x)=e^{-x}$, $f(0)=1$, $f(+\infty)=0$, так что значение интеграла будет равно $\ln\frac{b}{a}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

**Интеграл Эйлера-Пуассона:**

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*Доказательство.* Сначала исследуем этот интеграл на сходимость. Для этого распишем $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{1} e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Первый из двух интегралов в правой части не является несобственным, а второй сходится, так как $e^{-x^2} \le e^{-x}$ при $x \ge 1$ и

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}+e^{-1}\right) = e^{-1}.$$

Следовательно, интеграл Эйлера-Пуассона сходится.

Теперь покажем выполнение равенства, используя изменение порядка интегрирования в рассмотренном далее повторном интеграле. Заметим сначала, что при $y>0$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = y\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}dx.$$

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} ye^{-y^2}dy\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = I^2,$$

где интегрирование по $y$ ведется в пределах интервала $(0;+\infty)$.

В указанном повторном интеграле допустимо изменение порядка интегрирования по переменным $x$ и $y$, поэтому

$$I^2=\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_0^{+\infty}ye^{-(1+x^2)y^2}dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},$$

откуда $I=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Законность изменения порядка интегрирований объясняется тем, что функция $\int\limits_0^{+\infty}ye^{-(1+x^2)y^2}dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$ непрерывна при $x\ge 0$, а функция $\int\limits_0^{+\infty}ye^{-(1+x^2)y^2}dx=e^{-y^3}\cdot I$ непрерывна при $y>0$.

**Интеграл Дирихле:**

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha.$$

*Доказательство.* Вычислим $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-kx}\cdot\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ с помощью дифференцирования по параметру $\alpha$, которое здесь возможно (убедитесь в этом сами).

$$I'(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-kx}\cos\alpha x dx=\frac{k}{\alpha^2+k^2}.$$

Интегрируя по $\alpha$, найдем $I(\alpha)=\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k}$.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\lim_{k\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha>0,\\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha<0,\\ 0 & \text{при } \alpha=0.\end{cases}$$

**Пример 1.** С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл:

$$I(m)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx dx\ \ (\alpha>0,\ \beta>0).$$

*Решение.* Проверим законность дифференцирования по параметру:

1) $f(x,m)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx & \text{при } x\ne 0\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$

непрерывна при $x\ge 0$; $-\infty<m<+\infty$;

2) $f'_m(x,m)=\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\cos mx$ непрерывна при $x\ge 0$; $-\infty<m<+\infty$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx$ сходится;

4) $\int\limits_0^{+\infty} f'_m(x, m) dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right) \cos mx dx$ сходится равномерно в силу признака Вейерштрасса. Тогда

$$I'(m) = \frac{d}{dm} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right) \cos mx dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + m^2};$$

$$I(m) = \operatorname{arctg} \frac{m}{\alpha} - \operatorname{arctg} \frac{m}{\beta} + c.$$

Находим $c$ из условия $I(0) = 0,\ c = 0$

$$I(m) = \operatorname{arctg} \frac{m(\beta - \alpha)}{\alpha\beta + m^2}.$$

**Пример 2.** Пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона, найти

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1\right) e^{-\left(ax^2 + 2bx + c\right)} dx \text{ при } a > 0,\ ac - b^2 > 0.$$

*Решение.* Приведем трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ к каноническому виду:

$$ax^2 + 2bx + c = \left(\sqrt{a} x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a} = t^2 + c - \frac{b^2}{a},$$

где $t = \sqrt{a} x + \frac{b}{\sqrt{a}}$.

$$\left(a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1\right) e^{-t^2 + \frac{b^2}{a} - c} = \left(At^2 + 2Bt + C\right) e^{-t^2},$$

где

$$A = \frac{a_1}{a\sqrt{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}}; \quad B = \frac{b_1 a - a_1 b}{a^2} e^{\frac{b^2 - ac}{a}}; \qquad C = \frac{a^2 c_1 - 2abb_1 + a_1 b^2}{a^2 \sqrt{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}}.$$

$$C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = C\sqrt{\pi}; \qquad 2B \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = 0;$$

$$A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{A}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t de^{-t^2} = \frac{A}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{A\sqrt{\pi}}{2}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(At^2 + 2Bt + C\right) e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \left(\frac{A}{2} + C\right) =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left[\left(a + 2b^2\right) a_1 - 4abb_1 + 2a^2 c_1\right] e^{\frac{b^2 - ac}{a}}.$$

**Пример 3.** Пользуясь формулой $\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y\left(1+x^2\right)}dy$, вычислить интеграл Лапласа $L = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$.

*Решение.* Рассмотрим интеграл

$$L_k = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx^2}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx \quad (k>0).$$

Пользуясь формулой $\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y\left(1+x^2\right)}dy$, имеем:

$$L_k = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x dy.$$

Проверим условия теоремы 7:

1) функция $e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x$ непрерывна при $x \ge 0$, $y \ge 0$;

2) так как $\left|e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\right| \le e^{-y}$, $\left|e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\right| \le e^{-kx^2}$, интегралы $\int\limits_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x dy$, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x dx$ сходятся равномерно в силу признака Вейерштрасса;

3) $L_k$ сходится, так как $\left|\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x dy\right| \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-y}dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx^2}dx$.

Условия теоремы 7 выполнены, следовательно, можно изменить порядок интегрирования: $L_k = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y}dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x dx$.

Используя правило Лейбница и интеграл Эйлера-Пуассона, находим:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k+y}}e^{-\frac{\alpha^2}{4(k+y)}}.$$

Тогда $L_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+y}}e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4(k+y)}+y\right)}dy = e^k\sqrt{\pi}\int\limits_{\sqrt{k}}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t^2}+t^2\right)}dt$.

Так как $L_k = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx^2}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ равномерно сходится при $k \ge 0$ и подынтегральная функция непрерывна, то функция $L_k$ непрерывна при $k \ge 0$. Поэтому

$$L=\lim_{k\to+0}L_k=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t^2}+t^2\right)}dt.$$

Используя еще раз правило Лейбница и интеграл Эйлера-Пуассона, имеем $L=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$.

## Занятие 4

1. Вычислить, дифференцируя по параметру:

$I(a)=\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx$;

$I(b)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx dx,\ (a>0)$;

$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx,\ (\alpha>0,\ \beta>0)$.

2. Вычислить, используя интеграл Дирихле и формулу Фруллани:

$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$;

$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx$.

**Домашнее задание:** № 3794, 3804, 3817, 3820, 3821, 3827.

## 5. Эйлеровы интегралы

**Гамма-функция:** $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx,\ (p>0)$.

Свойства гамма-функции:

1. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$.

Если $n$ – целое положительное, то $\Gamma(n)=(n-1)!$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

2. Если $0<p<1$, то $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p}$.

3. Существуют непрерывные производные любого порядка при $p>0$:

$$\Gamma^{(k)}(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^k e^{-x}dx,\quad (k=1,2,...).$$

**Бета-функция:**

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx,\ (p>0,\ q>0).$$

Формула представления бета-функции через гамма-функцию:

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами вида $x^2y''+xy'+\left(x^2-a^2\right)y=0$ $(a-\text{const})$ называется уравнением Бесселя.

Общее решение этого уравнения при $a$ не равном целому числу, имеет вид

$$y(x)=c_1I_a(x)+c_2I_{-a}(x),$$

где $c_1, c_2$ – постоянные, а функции

$$I_a(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(a+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+a};$$

$$I_{-a}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-a+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-a}$$

называются функциями Бесселя первого рода индексов $a$ и $-a$ соответственно.

При $a=n$ $(n\in N)$ функции $I_n$ и $I_{-n}$ линейно зависимы, поэтому не образуют фундаментальной системы решений уравнения.

Второе решение этого уравнения, линейно зависимое с $I_n$, определяется равенством

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{a\to\pi}\left(\frac{\partial I_a(x)}{\partial a}-(-1)^n\frac{\partial I_{-a}(x)}{\partial a}\right),$$

где $a$ – нецелое число.

Функция $Y_n(x)$ называется функцией Бесселя второго рода. Значит, при $a=n$ общее решение дифференциального уравнения Бесселя имеет вид:

$$y(x)=c_1I_n(x)+c_2Y_n(x).$$

**Пример 1.** Вычислить, используя эйлеровы интегралы,

$$\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 xdx.$$

*Решение.* $\sin x=\sqrt{t},\ (t>0)$.

$$\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 xdx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{5}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)}=\frac{3\pi}{512}.$$

**Пример 2.** Выразить через эйлеровы интегралы

$$I=\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x dx,\ \ (a>0).$$

*Решение.* $x=\dfrac{t}{a}$, $I=\dfrac{1}{a^{p+1}}\int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t}\ln t dt-\dfrac{\ln a}{a^{p+1}}\int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$.

Легко видеть, что первый интеграл – производная от гамма-функции аргумента $(p+1)$.

$$I=\frac{\Gamma'(p+1)}{a^{p+1}}-\frac{\ln a}{a^{p+1}}\Gamma(p+1)=\frac{d}{dp}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right).$$

**Пример 3.** Вычислить $I(p)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx \quad (0<p<1)$.

*Решение.* Легко видеть, что $I(p)$ является производной от бета-функции:

$$I(p)=\frac{d}{dp}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{d}{dp}\mathrm{B}(p,1-p)=$$

$$=\frac{d}{dp}(\Gamma(p)\Gamma(1-p))=\frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)=-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}\ \ (0<p<1).$$

**Пример 4.** Решить уравнение $x^2y''+xy'+\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)y=0$.

*Решение.* Общее решение имеет вид $y(x)=C_1 I_{\frac{1}{2}}(x)+C_2 I_{-\frac{1}{2}}(x)$.

$$I_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+\dfrac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!(2k+1)!!\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Аналогично, $I_{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$.

Поэтому общее решение дифференциального уравнения

$$y(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(C_1\sin x+C_2\cos x\right).$$

## Занятие 5

1. Вычислить:

$\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\ \ (a>0)$; $\qquad \int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx$; $\qquad \int\limits_0^{1}\dfrac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}\ \ (n>1)$.

2. Выразить через эйлеровы интегралы:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx \quad (n>0); \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx; \qquad \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx.$$

3. Решить уравнение Бесселя $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)y = 0$.

**Домашнее задание:** № 3843, 3846, 3857, 3862, 3864.

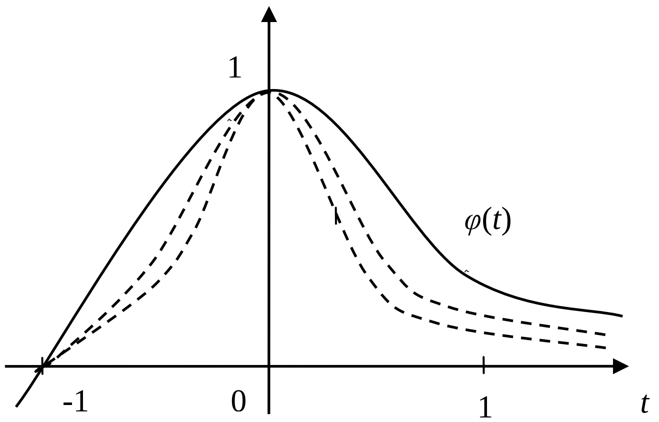
## 6. Об асимптотическом поведении гамма-функции и формуле Стирлинга

Выполним в гамма-функции замену переменной интегрирования $x = p(1+t)$ и получим

$$\Gamma(p+1) = e^{-p}p^{p+1}\int_{-1}^{+\infty}\left(e^{-t}(1+t)\right)^p dt.$$

Функция $\varphi(t) = e^{-t}(1+t)$ убывает при $t>0$, возрастает при $t<0$ и имеет в точке $t=0$ максимум $\varphi(0)=1$.

График функции $\varphi(t)$ имеет вид, изображенный на рисунке.




При возрастании параметра $p$ график функции $(\varphi(t))^p$ прижимается к оси переменной $t$ и единичному отрезку оси ординат.

Положим $h(t) = -t + \ln(1+t)$ при $-1 < t < +\infty$. Очевидно, $h(t) = -\frac{t^2}{2} + 0(t^2)$ при $t \to 0$.

$$\Gamma(p+1) = e^{-p}p^{p+1}\int_{-1}^{+\infty} e^{ph(t)}dt.$$

Ясно, что интеграл по $[-1;+\infty)$, стоящий в выражении $\Gamma(p+1)$, при больших значениях $p$ будет хорошо приближаться интегралом по $[-\delta;\delta]$ при произвольном фиксированном $\delta > 0$.

Иными словами, при достаточно великом $p$, на $[-1;-\delta]$ и $[\delta;+\infty)$ значения функции $e^{ph(t)}$ столь малы, что интегралами $\int_{-1}^{-\delta} e^{ph(t)}dt$ и $\int_{\delta}^{+\infty} e^{ph(t)}dt$ можно с высокой точностью пренебречь.

Таким образом, взяв достаточно малое $\delta > 0$, можно интеграл от $e^{ph(t)}$ по $[-\delta;\delta]$ хорошо приблизить интегралом

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{pt^2}{2}}dt = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\delta\sqrt{\frac{p}{2}}}^{\delta\sqrt{\frac{p}{2}}} e^{-u^2}du,$$

который при $p \to +\infty$ стремится к интегралу Эйлера-Пуассона.

Эти нестрогие рассуждения приводят к асимптотическому равенству

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{ph(t)}dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{p}}, \quad p \to +\infty.$$

За строгим обоснованием можно обратиться к [4, 5, 8].

В результате получается формула Стирлинга для гамма-функции

$$\Gamma(p+1) \sim \sqrt{2\pi}e^{-p}p^{p+\frac{1}{2}} \text{ при } p \to +\infty.$$

Если положить $p = n$, то получается формула Стирлинга для факториала натурального числа $n$

$$n! \sim \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}} \text{ при } n \to \infty,$$

так как $\Gamma(n+1) = n!$.

Исключительная роль гамма-функции в математическом анализе определяется тем, что при её помощи выражается большое количество определенных интегралов, бесконечных произведений и сумм рядов (напр., бета-функция). Кроме того, она находит широкие применения в теории специальных функций (гипергеометрической функции, для которой гамма-функция является предельным случаем, цилиндрических функций и др.), в аналитической теории чисел и т. д.

**Пример 1.** Используя формулу Стирлинга, приближённо вычислить следующую величину: $A = \dfrac{100!}{40! \cdot 60!}$.

*Решение.*. $A \approx \dfrac{\sqrt{2\cdot 100\pi}\cdot 100^{100+\frac{1}{2}}\cdot e^{-100}}{\sqrt{2\cdot 40\pi}\cdot 40^{40+\frac{1}{2}}\cdot e^{-40}\cdot\sqrt{2\cdot 60\pi}\cdot 60^{60+\frac{1}{2}}\cdot e^{-60}} =$

$$= \frac{10\sqrt{2\pi}\cdot 10^{100}\cdot 10^{100}\cdot 10}{2\pi\cdot 20\cdot 4^{40}\cdot 2\cdot 10^{40}\cdot 10^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{6}\cdot 6^{60}\cdot\sqrt{6}\cdot 10^{60}\cdot 10^{\frac{1}{2}}} =$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot 10^{100}\cdot 10^{100}\cdot 10}{\sqrt{\pi}\cdot 4^{41}\cdot 2\cdot 6^{61}\cdot 10^{101}}=\frac{\sqrt{2}\cdot 10^{100}}{\sqrt{\pi}\cdot 4^{41}\cdot 2\cdot 6^{61}}=\frac{10^{100}}{\sqrt{2\pi}\cdot 4^{41}\cdot 6^{61}}\approx$$

$$\approx\frac{10^{100}}{4^{41}\cdot 6^{62}}=\frac{2^{100}\cdot 5^{100}}{2^{82}\cdot 2^{62}\cdot 3^{62}}=\frac{5^{100}}{2^{44}\cdot 3^{62}}$$

Таким образом, $A\approx\dfrac{5^{100}}{2^{44}\cdot 3^{62}}$ .

**Пример 2.** Используя формулу Стирлинга, вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ .

*Решение..* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2n\pi n}^{\,n+\frac{1}{2}}e^{-n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[2n]{2n\pi}\,n^{1+\frac{1}{2n}}e^{-1}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot n}{\sqrt[2n]{2n\pi}\cdot n\cdot n^{\frac{1}{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{\sqrt[2n]{2n\pi}\cdot\sqrt[2n]{n}}=e\ .$$

## Занятие 6

1. Пользуясь формулой Стирлинга, приближенно вычислить:

$$\lg 100!;\qquad \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 99}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 100};\qquad \int_0^1\left(1-x^2\right)^{50}dx.$$

2. Приближенно вычислить $C_{2n}^{n}$, если $n$ велико.
3. Пользуясь формулой Стирлинга, найти следующие пределы:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}.$$

**Домашнее задание:** № 3112, 3115, 3117, 3120 (г).

## Контрольные вопросы по теме «Интегралы, зависящие от параметра»

1. Собственный интеграл, зависящий от параметра, с постоянными пределами интегрирования. Равномерная сходимость по параметру к предельной функции. Теоремы Коши и Дини.
2. Предельный переход под знаком интеграла, непрерывность собственного интеграла, зависящего от параметра, по параметру.
3. Дифференцирование и интегрирование по параметру в собственном интеграле с постоянными пределами интегрирования.
4. Интегралы, зависящие от параметра, с переменными пределами интегрирования и их непрерывность.
5. Дифференциальные и интегральные свойства интегралов, зависящих от параметра, с переменными пределами интегрирования.

6. Несобственный интеграл, зависящий от параметра, постановка задач.
7. Определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Примеры.
8. Теорема о повторных пределах и предельный переход под знаком несобственного интеграла, непрерывность по параметру.
9. Критерии и признаки равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.
10. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.
11. Непрерывность дифференцирование и интегрирование по параметру в несобственном интеграле.
12. Дифференциальные и интегральные свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра.
13. Интеграл Дирихле: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$.
14. Формула Валлиса.
15. Формула Фруллани.
16. Интеграл Эйлера-Пуассона.
17. Гамма-функция и её свойства: непрерывность и дифференцируемость.
18. Бета-функция и её свойства: непрерывность и дифференцируемость.
19. Формула связи между гамма- и бета- функциями.
20. Формула Стирлинга.

**Примерное задание для самостоятельной работы по теме «Интегралы, зависящие от параметра»**

1. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующий интеграл: $J(a) = \int\limits_0^{n/2} \ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1)$.

2. Найти $I'(\alpha)$, если $I(\alpha) = \int\limits_0^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha} dx$ $(\alpha > 0)$.

3. Найти $F'(a)$, если $F(a) = \int\limits_0^{a^2} dx \int\limits_{x-a}^{x+a} \sin\left(x^2 + y^2 - a^2\right) dy$.

4. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx \text{ при } a < \alpha < b; \text{ при } -\infty < \alpha < +\infty.$$

5. Вычислить, дифференцируя по параметру

$$I(b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx, \ (a > 0).$$

6. Выразить через эйлеровы интегралы:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx \quad (n>0); \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx\,.$$

## Библиографический список


1. Гурский Е.И. Руковод. к решению задач по высшей математике. Ч. 2./ Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.П. Сильванович. – Минск: Выш. шк. 1990.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: АСТ: Астрель, 2010.
3. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу./ Г.И. Запорожец. – М.: Высшая школа, 1966.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II / В.А. Зорич. – М.: МЦНМО, 2002.
5. Ильин В.А. Основы математического анализа. Часть II / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Физматлит, 2002.
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т. II / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2004.
7. Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы и ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1986.
8. Ляшко И.И. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. 2. / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. – Киев: В. шк. 1979.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II, III / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2001.
10. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч.1-2 / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1969.

## Приложение

**Некоторые частные значения гамма-функции:**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\approx 1,772454, \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\approx 2,678939, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\approx 3,62561,$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\approx 1,354118, \qquad \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\approx 1,225417,$$

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\approx 0,89298, \qquad \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\approx 0,906402,$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\approx 0,902745, \qquad \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\approx 0,919063.$$

$$\min_{p>0}\Gamma(p)=\Gamma(1,46163\ldots)=0,88560\ldots.$$

**Формула умножения:**

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{(2\pi)^{n-1}n}\,\frac{\Gamma(np)}{n^{np}}.$$

**Различные представления гамма-функции:**

$$\Gamma(p)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^p}{p(p+1)\ldots(p+n)},$$

$$\Gamma(p)=\frac{1}{p}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{p}{n}\right)^{-1},$$

$$\Gamma(p)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{p-1}dt.$$

**Логарифмическая производная гамма-функции:**

$$\phi(p)=(\ln\Gamma(p))'=\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}.$$

Учебное издание

Саженков Александр Николаевич
Саженкова Татьяна Владимировна
Плотникова Елена Александровна

# ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

*Учебно-методическое пособие*

Печатается в авторской редакции

Подготовка оригинал-макета: *О.А. Жданова*

Издательская лицензия ЛР 020261 от 14.01.1997
Подписано в печать 28.05.2018
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Усл.-печ. л. 1.8. Тираж 100. Заказ 284.

Издательство Алтайского государственного университета

Типография Алтайского государственного университета
656099 Барнаул, ул. Димитрова, 66