УДК 517.95

Автомодельное решение задачи абляции деформируемого ледового покрова

Н.Ю. Глебова, А.А. Папин
АлтГУ, г. Барнаул

В работе изучается модель, описывающая процесс сублимации льда. Лёд рассматривается как деформируемая пористая среда, в порах которой движется влажный воздух. В основе рассматриваемой модели лежат уравнения сохранения масс с учётом фазового перехода, закон Дарси для влажного воздуха, учитывающий движение пористого скелета, реологическое уравнение для пористости, уравнения равновесия и сохранения энергии для системы лёд-воздух [1, 2]:

$$\frac{\partial \phi\rho_f}{\partial t}+div\big(\phi\rho_f\vec{u}_f\big)=-S, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t}+div((1-\phi)\rho_s\vec{u}_s)=S, \tag{2}$$

$$\phi\big(\vec{u}_f-\vec{u}_s\big)=\ -K_0\frac{k}{\mu}\big(\nabla p_f+\rho_f\vec{g}\big), \tag{3}$$

$$(c_f\rho_f^0\phi+c_s\rho_s^0(1-\phi))\frac{\partial\theta}{\partial t}+(\phi\rho_f\vec{u}_f+(1-\phi)\rho_s\vec{u}_s)\nabla\theta$$
$$=div(\lambda_c\nabla\theta)-L_sS, \tag{4}$$

$$p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s,\quad p_e=(1-\phi)\big(p_s-p_f\big), \tag{5}$$

$$\rho_{tot}=\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s, \tag{1}$$

$$p_f=\rho_f R\theta,\quad \nabla\cdot\vec{u}_s=-a(\phi)p_e,\quad \nabla p_{tot}=\rho_{tot}\vec{g}. \tag{7}$$

Здесь $\rho_f,\rho_s,\vec{u}_f,\vec{u}_s$ – соответственно истинные плотности и скорости влажного воздуха и льда; ϕ – пористость, $p_f(\rho_f,\theta),p_s$ – соответственно давление льда и пара; p_e – эффективное давление; θ – температура среды; $S(\varphi,\rho_f\ ,\theta)$ – интенсивность фазового перехода лёд-влажный воздух; K_0 – тензор фильтрации; k – проницаемость; μ – динамическая вязкость газа; $a(\varphi),c_f,c_s,\lambda_c$ – параметры пороупругой среды; R – универсальная газовая постоянная.

В приложениях широко используется следующая эмпирическая формула для фазового перехода [3]:

$$S(x,t)=\frac{dm}{dt}(\theta,\sigma,u)\frac{3c(x,t)}{4\pi r^3},\quad \frac{dm}{dt}=\frac{2\pi r\sigma}{\frac{L_S}{K\theta Nu}\left(\frac{L_SM}{R\theta}-1\right)+\frac{1}{D\rho_{tot}Sh}},\sigma=\left(\frac{\rho_f}{\rho_n}-1\right),$$

где L_s – теплота сублимации льда; $c(x,t) = 1 - \varphi$ – концентрация льда; $\frac{dm}{dt}$ – скорость изменения массы; σ-пересыщение водяного пара относительно льда; M – молярная масса воды; r – радиус частицы; D – коэффициент диффузии; K – молекулярная теплопроводность в атмосфере; ρ_n – плотность насыщенного водяного пара; Nu – число Нуссельта; Sh – число Шервуда.

Данная зависимость для фазового перехода была использована в работах [4, 5]. В настоящей работе используется следующая формула

$$S = \begin{cases} G\,\phi(1-\phi)(\rho_f - \rho_n)\dfrac{\rho_f}{\rho_n}, 0 \le \rho_f \le \rho_n \\ 0, \qquad \rho_f \le 0, \quad \rho_f \ge \rho_n \end{cases},$$

$$\mathrm{G} = \frac{3\rho_s}{\rho_n r^2\left(\frac{L_s}{K\theta Nu}(\frac{L_s M}{R\theta} - 1) + \frac{1}{D\rho_n Sh})\right)}.$$

Математическое обоснование постановок начально-краевых задач для системы (1)–(7) приведено в работе [6] в предположении, что лёд является неподвижной, вязкой и несжимаемой средой. В случае S = 0 система рассматривалась в работе [7]. Близкие вопросы рассматривались в [8, 9, 10].

При исследовании системы (1)–(7) используются следующие гипотезы: температура постоянна ($\theta = const$), сила тяжести отсутствует, движение является одномерным. В данных предположения строится автомодельное решение типа «бегущей волны» $\xi = x - ct$, где $c < 0$. В результате приходим к системе вида $(-\infty < \xi < 0)$

$$\frac{d}{d\xi}\left((u_f - c)\rho_f\phi\right) = -S, \tag{8}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left((u_s - c)\rho_s(1-\phi)\right) = S, \tag{9}$$

$$\phi(u_f - u_S) = -\widehat{K}_0\frac{dp_f}{d\xi}, \quad \widehat{K}_0 = K_0\frac{k}{\mu}, \tag{10}$$

$$\frac{du_s}{d\xi} = -a\,(\phi)p_e\,, p_e = p^0 - p_f\,, p_f = R\theta\rho_f, p^0 = const\,. \tag{11}$$

Из (8) и (9) имеем

$$(u_f - c)\rho_f\phi + (u_s - c)\rho_s(1-\phi) = A_1 = const. \tag{12}$$

Используя граничные условия

$$u_f(0) = u_f^+, u_s(0) = u_s^+, \phi(0) = \phi^+,\ \rho_f = \rho^+, \qquad \lim_{\xi\to\infty} u_f(\xi) = u_f^-,$$

$$\lim_{\xi\to-\infty} u_s(\xi) = u_s^-, \qquad \lim_{\xi\to-\infty}\phi(\xi) = \phi^-, \qquad \lim_{\xi\to-\infty}\rho_f(\xi) = \rho^-,$$

находим $c < 0$ и A_1 в виде

$$c = \frac{u_f^- \rho^- \phi^- - u_f^+ \rho^+ \phi^+ + \rho_s((1-\phi^-)u_s^- - (1-\phi^+)u_s^+)}{\rho^- \phi^- - \rho^+ \phi^+ + \rho_s(\phi^+ - \phi^-)},$$

$$A_1 = u_f^- \rho^- \phi^- + \rho_s(1-\phi^-)u_s^- - c\big(\rho^- \phi^- - \rho_s(1-\phi^-)\big).$$

Система (8)–(11) сводится к двум уравнениям:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\rho_{tot}}\left(A_1 + \hat{K}_0 \rho_f \frac{dp_f}{d\xi}\right)\right) = -a(\phi)(p^0 - p_f),$$

$$\frac{d}{d\xi}\big((u_s - c)\rho_s(1-\phi)\big) = S,\ u_s - c = \frac{1}{\rho_{tot}}\left(A_1 + \hat{K}_0 \rho_f \frac{dp_f}{d\xi}\right).$$

Основным результатом работы является доказательство принципов максимума для ρ_f и ϕ, вида $0 \le \rho_f \le \rho_n$ и $0 \le \phi \le 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291 «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями».

Библиографический список

1. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. – М.: Наука, 1983. – 214 с., с. 105.

2. Fowler, A.C. (1990), A compaction model for melt transport in the Earth’s asthenosphere, part 1, the basic model, in Magma Transport and Storage, edited by M.P. Ryan,pp. 3-14, Jhon Wiley, New York.

3. Thorpe A.D., B.J. Mason. The evaporation of spheres and ice crystals, Br. J. Appl. Phys., 17, 541–548, 1996.

4. C. D. Groot Zwaaftink, H. L¨owe, R. Mott, M. Bavay, and M.Lehnin. Drifting snow sublimation : A high- resolution 3-D model with temperature and moisture feedbacks,2011.

5. Xiaoqing Dai, Ning Huang Numerical simulation of drifting snow sublimation in the saltation layer // Key Laboratory of mechanics on Disaster and Environment in Western China, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China, 2014.

6. Глебова Н.Ю., Папин А.А. Автомодельное решение задачи о сублимации снега. Ломоносовские чтения на Алтае(2017). – С. 404.

7. Токарева М.А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Т. 2, № 1. – С. 153–157.

8. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 4 (290). – С. 13–24.

9. Papin A. A., Sibin A. N. Model isothermal internal erosion of soil // J. Phys.: Conf. Ser. Volume 722, conference 1, 2016. p. 1–8.

10. ПапинА.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия АлтГУ. – 2016. – № 1 (89). – С. 152–156.

УДК 536.25

Математические модели конвективных течений в условиях массопереноса на термокапиллярной границе разделе

О.Н. Гончарова
АлтГУ, г. Барнаул

Теоретическому и экспериментальному изучению проблем конвекции жидкостей в условиях тепломассопереноса на границе раздела уделяется в настоящее время большое внимание [1]. Важность результатов таких исследований состоит в их использовании при решении комплекса научных задач механики жидкости и теплофизики, возникающих при оптимизации и совершенствовании прикладных разработок в области жидкостных технологий охлаждения, систем регистрации информации, получения кристаллов с высокой степенью структурной однородности. При проведении исследований разрабатываются новые либо уточнённые математические модели, адекватно описывающие изучаемые физические процессы, позволяющие выявить механизмы возможных кризисных явлений и определить способы управления течениями, изучить влияние разнородных физико-химических факторов, в частности, воздействия точечного лазерного излучения и испарения на структуру течения.

Одним из принципиальных вопросов математического моделирования является построение точного решения определяющих уравнений. На основе трёхмерных [2, 3] и двумерных [4, 5] точных решений уравнений Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска проводится аналитическое и численное исследование двухслойных течений с испарением и/или конденсацией на границе раздела. Построенные решения могут быть названы обобщением решения Остроумова–Бириха [6, 7], имеют групповую природу [8] и позволяют учесть одновременное наличие горизонтального и вертикального градиентов температуры, эффекты диффузионной теплопроводности и термодиффузии пара в газовой среде и на межфазной границе. Именно решения групповой природы подразумевают сохранение свойств симметрии,