УДК 539.3: 534.2

О распространении термоупругих волн в анизотропных средах. Структура матриканта

Н.А. Испулов[1], Ж.Д. Оспанова[1], Т.Г. Кисиков[2]
[1]Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар, Казахстан,
[2]Университет Калифорнии, г. Дэвис, США

Введение

Связанные уравнения движения и уравнения теплопроводности отличаются сложностью и обилием физико-механических параметров. В связи с этим интенсивно развивается раздел механики деформируемого твердого тела, – термоупругость. Термоупругость описывает широкий круг явлений, являясь обобщением классической теории упругости и теории теплопроводности. В настоящее время термоупругость является вполне законченной областью в случае изотропной среды: записаны основные зависимости и дифференциальные уравнения, предложено несколько методов решения уравнений термоупругости, доказаны основные энергетические и вариационные теоремы, решено несколько задач по распространению термоупругих волн. Интерес представляет распространение термоупругих волн в анизотропных средах.

В данной работе на основе метода матриканта [1, 2, 3, 4] рассмотрено построение системы дифференциальных уравнений 1-го порядка и вытекающей из нее матрицы коэффициентов для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропных средах ромбической сингонии. Построена структура матриканта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае. Данная среда обладает низкой симметрией и обладает 9-ю упругими и 3-мя термомеханическими параметрами.

1. Метод исследования

Метод исследования работы – аналитический, основанный на развитии матричных методов исследования динамики упругих слоистых сред [1].

Суть метода заключается в приведении исходных уравнений движения, на основе метода разделения переменных (представления решения в виде плоских волн), к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами и построении структуры матриканта (нормированная матрица фундаментальных решений).

Матричный метод позволяет при едином подходе рассматривать распространение волн в широком классе сред. Другое достоинство этого метода состоит в том, что выражения, полученные матричным методом, имеют весьма компактную форму, которая оказывается удобной как при аналитических исследованиях, так и при численных расчетах.

2. Определяющие соотношения

Задачи о распространении термоупругих волн в анизотропных средах основываются на совместном решении уравнений движения [5]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i \tag{1}$$

или в покомпонентной форме

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{XX}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{XY}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{XZ}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_X}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial \sigma_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{YY}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{YZ}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_Y}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial \sigma_{XZ}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{YZ}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{ZZ}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_Z}{\partial t^2} \end{aligned} \qquad (1)^{/},$$

уравнения теплопроводности Фурье

$$\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -q_i \tag{2}$$

уравнения притока тепла

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -i\omega \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - i\omega \frac{c_\varepsilon}{T_0} \theta, \tag{3}$$

где σ_{ij} – тензор напряжения; ρ – плотность среды; λ_{ij} – тензор теплопроводности; q_i – вектор притока тепла; ω – круговая частота; β_{ij} – термомеханические параметры; ε_{ij} – тензор малых деформаций Коши; c_ε – теплоемкость при постоянной деформации; $\theta = T - T_0$ – приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния T_0, $\left|\frac{\theta}{T_0}\right| \prec\prec 1$ для малых деформаций.

Физико-механические величины связаны соотношением Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta. \tag{4}$$

Для *ромбической сингонии* (в качестве осей координат выбираются три ортогональные оси симметрии или инверсионные оси второго порядка) число упругих постоянных равно 9, а термомеханических параметров – 3. В матричном виде соотношение Дюгамеля - Неймана (4) для ромбической сингонии имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \theta \tag{4$^/$}$$

где c_{ijkl} – упругие параметры анизотропной среды триклинной сингонии.

3. Построение системы дифференциальных уравнений 1 порядка. Уравнения (1)–(4) определяют взаимосвязь механических напряжений и температуры как функции независимых переменных – теплового поля и деформации.

На основе метода разделения переменных в случае гармонической зависимости от времени:

$$\left[U_i(x,y,z,t);\;\; \sigma_{ij}(x,y,z,t);\; \theta;\; q_z \right] =$$

$$= \left[U_i(z), \sigma_{ij}(z),\; \theta;\; q_z \right] e^{i(\omega t - mx - ny)} \tag{5}$$

система уравнений (1)–(4) приводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W}. \tag{6}$$

Здесь $\vec{W}(x,y,z,t) = \left[u_z(z), \sigma_{zz}, u_x(z), \sigma_{xz}, u_y(z), \sigma_{yz}, \theta, q_z \right]^t \exp(i\omega t - imx - iny)$ – вектор-столбец. Символ t означает операцию транспонирования вектора-строки в вектор-столбец.

$B = B\left[c_{ijkl}(z), \beta_{ij}(z), \theta, \omega, m, n\right]$ – матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе параметры среды, в которой распространяются термоупругие волны, m,n – компоненты волнового вектора $\tilde{k}$

Матрица коэффициентов B в объемном случае для ромбической сингонии имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & -i\omega b_{47} & 0 & -i\omega b_{67} & 0 & b_{87} & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{W} = \begin{pmatrix} u_z \\ \sigma_{zz} \\ u_x \\ \sigma_{xz} \\ u_y \\ \sigma_{yz} \\ \theta \\ q_z \end{pmatrix}$$

Из структуры матрицы коэффициентов следует, что в пространственном случае упругие волны различной поляризации и тепловые волны взаимосвязаны. Связь тепловой волны с упругими волнами характеризуется коэффициентом b_{17}, который равен

$$b_{17} = \frac{\beta_{33}}{c_{33}}.$$

Не нулевые элементы b_{47} и b_{67}:

$$b_{47} = \left(\frac{c_{13}}{c_{33}}\beta_{33} - \beta_{11}\right) im; \qquad b_{67} = \left(\frac{c_{23}}{c_{33}}\beta_{33} - \beta_{22}\right) in$$

означают влияние на упругие волны поперечных поляризаций термоупругого эффекта. При этом b_{47} описывает влияние термоупругого эффекта на упругую поперечную волну X-поляризации, а b_{67} влияние термоупругого эффекта на поперечную волну Y-поляризации.

4. Структура матрицанта

Нормированное решение уравнения (6) называется матрицантом. Любое другое решение, имеющее смысл матрицы фундаментальных решений имеет вид

$$X = T(z_0, z)C,$$

где $T(z_0, z)$ – матрицант; C – ненулевая матрица ($\det C \neq 0$).

Построение структуры матриканта основано на его представлении в форме экспоненциального матричного ряда [6]:

$$T = E + \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_1) B(z_2) dz_1 dz_2 + \ldots \tag{7}$$

И аналогичном представлении обратного матриканта T^{-1}

$$T^{-1} = E - \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_2) B(z_1) dz_1 dz_2 - \ldots \tag{8}$$

Матричные ряды (7), (8) представимы в виде сумм матриц

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_{(n)}, T^{-1} = \sum T_{(n)}^{-1}. \tag{9}$$

Бесконечный матричный ряд (8) также абсолютно и равномерно сходится на любом интервале. Ряд (8) отличается от (7) обратным порядком перемножения *$B(z_1)$*.

Структура матриканта в случае распространения термоупругих волн в анизотропных средах ромбической сингонии в объемном случае определена в виде:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} & -t_{62} & t_{52} & t_{82} & -t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} & t_{61} & -t_{51} & -t_{81} & t_{71} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} & t_{64} & -t_{54} & -t_{84} & t_{74} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} & -t_{63} & t_{53} & t_{83} & -t_{73} \\ -t_{26} & t_{16} & t_{46} & -t_{36} & t_{66} & -t_{56} & -t_{86} & t_{76} \\ t_{25} & -t_{15} & -t_{45} & t_{35} & -t_{65} & t_{55} & t_{85} & -t_{75} \\ t_{28} & -t_{18} & -t_{48} & t_{38} & -t_{68} & t_{58} & t_{88} & -t_{78} \\ -t_{27} & t_{17} & t_{47} & -t_{37} & t_{67} & -t_{57} & -t_{87} & t_{77} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Структура матриканта есть зависимость между элементами прямого и обратного матриканта в форме (7)–(8) и все следствия, вытекающие из него, а также зависимость между элементами T и T^{-1}, следующие из тождества [6]:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E, \tag{11}$$

где E-единичная матрица

Заключение

В работе построена система дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающая распространение термоупругих волн в анизотропных средах ромбической сингонии, а знание структуры матрицы коэффициентов в этой системе позволяет определить связь между волнами различной поляризации, в данном случае определить связь упругих и тепловых волн, т.е. наличие термоупругого эффекта. Построена структура матриканта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае.

Библиографический список

1. Тлеукенов С.К. Метод матриканта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 148 с.
2. Ispulov N. A., Qadir A., and Shah M.A. Reflection of thermoelastic wave on the interface of isotropic half-space and tetragonal syngony anisotropic medium of classes 4, 4/m with thermomechanical effect // Chinese Physics B, vol. 25, no. 3, Article ID 038102, 2016.
3. Ispulov N. A., Qadir A., Zhukenov M. K., Dossanov T. S., and Kissikov T. G. The analytical form of the dispersion equation of elastic waves in periodically inhomogeneous medium of different classes of crystals // Advances in Mathematical Physics, vol. 2017, Article ID 5236898, 2017.
4. Nurlybek A. Ispulov, Abdul Qadir, Marat Zhukenov, and Erkin Arinov. The Propagation of Thermoelastic Waves in Anisotropic Media of Orthorhombic, Hexagonal, and Tetragonal Syngonies // Advances in Mathematical Physics, Volume 2017, Article ID 4898467, 2017.
5. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1986, 556 с.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука,1988, 552 с.

УДК 517.9

Задача Коши–Дирихле для квазилинейного ультра-параболического уравнения колмогоровского типа

И.В. Кузнецов[1], С.А. Саженков[1,2]
[1]ИГиЛ СО РАН, НГУ, Новосибирск;
[2]Хэйлунцзянский ун-т, Харбин

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для неклассического квазилинейного уравнения конвекции-диффузии колмогоровского типа. Уравнение содержит две время-подобные переменные t и s. Его особенностью является то, что направление течения времени по переменной s может меняться. В связи с этим возникает возможность, что заданные начальные и финальные условия по s могут не приниматься решением. В настоящей статье формулируется достаточно общий класс слабых энтропийных решений, хорошо согласованный с физической мотивировкой задачи. Доказывается, что для этого класса поставленная задача является корректной. В целом, исследование является продолжением работ авторов [1, 2].