Характеризующие внутренние волны линии $\rho_1(x, z^*, t)$ для $z^* = 3.0;\ -3.0$ представлены на рисунке 2. Термик генерирует внутренние волны существенно большей амплитуды в сравнении с волнами, индуцируемыми коллапсом пятна, находящегося в начальный момент на уровне равновесной плотности. Следует отметить, что величины амплитуд $\rho_1(x, -3.0, 10)$, почти в четыре раза превосходят амплитуды $\rho_1(x, 3.0, 10)$. Для оценки точности разностной схемы и её эффективности расчёты были проведены на последовательности сеток.

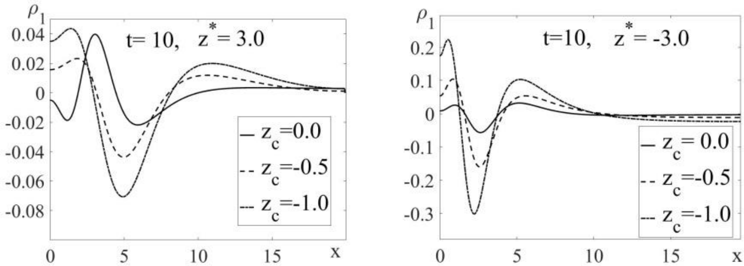

Рисунок 2 – Линии $\rho_1(x, z^*, 10)$, $z^* = 3.0;\ -3.0.$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 17-01-00332.

Библиографический список

1. Антропов И.В., Кронрод В.А., О зависимости процесса эволюции термика в стратифицированной среде от начальных условий // Изв. АН СССР, ФАО, 1989. – Т.25. – №12. – С. 1261–1266.

2. Moshkin, N.P., Narong K., Chernykh, G.G., A comparative study of the performance of high-resolution non-oscillating advection schemes in the context of the motion induced by mixed region in a stratified fluid // Journal of Engineering Thermophysics. 2011. – vol. 20. – Iss. 4. – P. 468–486.

УДК 517.95

Математические модели многофазной фильтрации

А.А. Папин

АлтГУ, г. Барнаул

Методы динамики многофазных сред широко применяются для математического моделирования различных технологических и природных процессов. В большей степени разработаны математические модели фильтрации углеводородов в пористой среде. В классических моделях пористость считается постоянной (или заданной функцией точки), фазовые переходы не учитываются. В последнее время, в связи с добычей нефти и газа в осадочных породах, проблемой захоронения больших объемов углекислого газа в горной породе, возникла необходимость разработки моделей, учитывающих деформацию пористого скелета. Такие модели ведут свое начало от классических работ Био и Терцаги и представлены в работах [1, 2]. Вопросам обоснования моделей фильтрации жидкостей в деформируемых пористых средах посвящены работы [3–6].

Другой большой класс задач фильтрации в деформируемой пористой среде с фазовыми переходами составляют задачи тепломассопереноса в тающем снежно-ледовом покрове [7]. Преобладающая часть стока северных рек формируется за счет таяния сезонного снежного покрова. Условия снеготаяния оказывают решающее влияние не только на количество поступающих в водоемы-приемники талых вод, но и на их качество. Кроме того, величина снежного покрова (снегозапас) влияет на промерзание поверхностного слоя почв и, следовательно, его впитывающую способность и определяет соотношение между склоновым и грунтовым стоками. Поэтому моделирование состояния снежного покрова и солепереноса в период снеготаяния имеет важное значение при разработке методов расчетов и прогнозов гидрографов весеннего половодья и качества воды в водоемах-приемниках.

Имеется большое число работ по солемассопереносу в тающем снеге, в которых используются данные наблюдений и эмпирические зависимости [8]. В большинстве своем эмпирические модели являются одномерными и не позволяют вычислить скорость фильтрации жидкости, а модели, вычисляющие скорость фильтрации жидкости, обычно не учитывают фазовые переходы или пригодны только для специфичных режимов движения воды в снежном покрове, они также не дают нужной информации о поле скоростей и насыщенности водной фазы, необходимой для оценки стока загрязняющих веществ.

Таким образом, для достоверного прогноза стока загрязняющих веществ нужно знать поле скоростей и насыщенность водной фазы, т.е предлагается использовать комплексные модели, описывающие совместное движение загрязняющих веществ и воды в снежном покрове с учетом различных краевых условий, фазовых переходов и процесса сублимации. Эти модели позволят рассчитать нестационарное движение загрязняющих веществ внутри снежного покрова и оценить поверхностный и подземный стоки веществ. Они должны учитывать ряд важных факторов, в том числе – переменную пористость снежного покрова, фазовые переходы, специфику граничных условий (в частности, наличие промерзшего или не промерзшего грунта). Основы теории движения воды и воздуха в тающем снеге заложены в работах S.C. Colbeck [9] и его последователей. Однако, снег в данных работах хотя и рассматривался как многофазная среда, деформация льда и фазовые переходы не учитывались.

В [7] построена модель совместного движения воды и воздуха в тающем снежно-ледовом покрове с учетом деформации льда. Определены скорости фильтрации каждой фазы, распределение насыщенности и глубина протаивания. Проведены численные расчеты автомодельной задачи, показано, что решение обладает конечной скоростью распространения возмущений. Кроме того, построена модель тающего льда как пороупругой двухфазной среды (лед, вода). Исследовано движение в тонком слое. Для описания процессов фильтрации в тонком пороупругом слое льда использовались законы сохранения масс для жидкости и твердой фазы, закон Дарси для жидкости, учитывающий движение скелета, реологический закон типа Максвелла и уравнение сохранения импульса системы в целом. Рассмотрены различные режимы фильтрации в зависимости от поведения возникающего в задаче малого параметра [10]. Разработан алгоритм численного решения движения воды и воздуха в тающем снеге, проведены расчеты. Проведено численное и аналитическое решение двумерной задачи о снеготаянии. В качестве математической модели использовались уравнения сохранения массы для каждой фазы, уравнения двухфазной фильтрации Маскета-Леверетта для воды и воздуха, уравнение сохранения энергии для тающего снега и уравнение движения льда. Задача сводится к системе из трех уравнений относительно температуры, «приведенного» давления и насыщенности водной фазы. Для полученной системы уравнений рассмотрена начально-краевая задача и построена конечно-разностная схема на основе метода переменных направлений. Задача была решена численно при следующих краевых условиях: на поверхности снежного покрова задавались насыщенность воды, температура воздуха (выше температуры плавления льда), атмосферное давление воздуха, скорость воды и воздуха, на границе контакта с промерзшим грунтом вода отсутствует, заданы температура воздуха (ниже температуры плавления льда) и давление. Проведены расчеты тестовой задачи, определены насыщенность и температура при заданных начальных приближениях и проведен графический анализ результатов. Для насыщенности воды установлено свойство конечной скорости распространения возмущений [7, 11, 12].

Работа посвящена памяти профессора кафедры дифференциальных уравнений Сергея Семеновича Кузикова.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями»□№16-08-00291.

Библиографический список

1. Fowler A. Mathematical Geoscience // Springer-Verlag London Limited. – 2011. – 904 p.

2. Connolly J.A.D. and Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. – 1998. – V. 11. – P. 55–84.

3. Simpson M., Spiegelman M. and Weinstein M.I. Degenerate dispersive equations arising in the stady of magma dynamics // Nonlinearity. – 2007. – V. 20. – P. 21–49.

4. Бочаров О.Б., Рудяк В.Я., Серяков А.В. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2014. – № 2. – С. 54–68.

5. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local Solvability of the System of the Equations of One Dimensional Motion of Magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics \& Physics. – 2017. – Vol. 10(3). – P. 385–395.

6. Papin A.A., Sibin A.N. Model internal erosion of soil // J.Phys. : Conf.Ser., 2016. – V. 722(1). – P. 1–8.

7. Папин А.А., Сибин А.Н., Шишмарев К.А. Математические модели тающего снежно-ледового покрова и протаивающих грунтов (учебное пособие). Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2016. – 96 с.

8. Lehning, M. et al., A physical SNOWPACK model for the Swiss avalanche warning Part II: //Snow microstructure, 2002.

9. Colbeck S.C. A theory of water percolation in snow // J.Glaciol. 1972, N 11. (63), P. 369–385.

10. Токарева М.А. Двумерная задача фильтрации в тонком пороупругом слое // Известия АлтГУ, Барнаул, 2013. Вып. 1/1 (77). – С. 60–62.

11. Папин А.А, Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 4 (290). – С. 13–24.

12. Кузиков С.С., Папин А.А. Математическое моделирование гидродинамических процессов водохранилища. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2014. – 106 с.