3. Гутовская О.М., Дронов С.В. Формирование экспертных групп методами кластерного анализа. // В сборнике: Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования. Сборник научных статей международной конференции. Ответственный редактор Е. Д. Родионов. 2017. – С. 574–578.

4. Bryukhanova E.A., Dronov S.V., Chekryzhova O.I. Spatial Approach to the Analysis of the Employment Data in Siberia Based on the 1897 Census (the Experience of the Multivariate Statistical Analysis of the Districts Data). // Journal of Siberian Federal University. Humanities & Social Sciences. – 2016. – № 7. – P. 1651–1660.

5. Dodge Y. The Concise Encyclopedia of Statistics. N.Y.: Springer-Verlag, 2010. – p. 502.

УДК 514.765

Исследование метрик Эйнштейна трехмерных групп Ли с векторным кручением с помощью универсальных математических пакетов

П.Н. Клепиков, О.П. Хромова
АлтГУ, г. Барнаул

Пусть *(M,g)* – (псевдо)риманово многообразие, на котором определена *метрическая связность* ∇ *с векторным кручением*, т.е. связность вида

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \qquad (1)$$

где ∇^g – связность Леви-Чивита, V – некоторое фиксированное векторное поле, X,Y – произвольные векторные поля. Данная связность является одной из основных связностей, описанных Э.Картаном в [1], и также называется полусимметрической связностью. В случае двумерных поверхностей любая метрическая связность является связностью с векторным кручением. В произвольной размерности интересен тот факт, что (см. [2])

Теорема 1. *Риманово многообразие допускает метрическую связность с векторным кручением, тензор кривизны которой равен нулю, тогда и только тогда, когда оно является конформно плоским.*

Данное утверждение обобщается и на случай псевдоримановой метрики, т.к. доказательство не использует положительную определенность метрического тензора.

Определим тензор кривизны R и тензор Риччи r связности ∇ соответственно равенствами

$$R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$
$$r(X,Y) = \mathrm{tr}\,(Z \to R(X,Z)Y).$$

Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие *(M,g)* с метрической связностью с векторным кручением является *многообразием Эйнштейна*, если тензор Риччи удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$r = \Lambda g$$

для некоторой скалярной функции Λ.

В случае (псевдо)римановых многообразий со связностью Леви-Чивита многообразия Эйнштейна достаточно известны (см., например, [3]). Они допускают несколько обобщений на случай многообразий с метрической связностью с векторным кручением [4].

В настоящей работе исследуется уравнение Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с метрической связностью с векторным кручением, которую порождает левоинвариантное векторное поле *V*. В частности, установлено

Теорема 2. *Если для трехмерной метрической группы Ли с метрической связностью с левоинваринтным векторным кручением выполняется уравнение Эйнштейна, то либо векторное поле V тривиально, либо тензор кривизны равен нулю.*

Поскольку условие тривиальности векторного поля V равносильно тому, что данная связность является связностью Леви-Чивита в силу (1), а условие тривиальности тензора кривизны по теореме 1 влечет, что группа конформно плоская, то немедленным следствием теоремы 2 является

Теорема 3. *Если трехмерная метрическая группа Ли допускает такую метрическую связность с левоинваринтным векторным кручением, что выполняется уравнение Эйнштейна, то она либо является многообразием Эйнштейна относительно связности Леви-Чивита, либо является конформно плоской.*

Доказательство данного утверждения основано на применении математических и компьютерных моделей, приведенных в [5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-31-00033 мол_а).

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativite generalisee (deuxieme partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. – 1925. – № 42. – P. 17–88.

2. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. – 1970. – № 15. – P. 1579–1586.

3. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: В 2 т. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 704 с.

4. Chaturvedi B.B., Gupta B.K. Study on Semi-symmetric Metric Spaces // Novi Sad J. Math. – 2014. – 44. – № 2. – P. 183–194.

5. Хромова О.П. Применение СКМ при исследовании метрических связностей с векторным кручением на конечномерных группах Ли // Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники» – 2018 [Электронный ресурс] / АлтГУ; отв. ред. Е.Д.Родионов. – Электрон. текст. дан. (250 Мб). – Барнаул: ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет». – 2018. – С.367–370.

УДК 514.765

Тензор кривизны трехмерных метрических групп Ли с метрической связностью с векторным кручением

С.В. Клепикова
АлтГУ, г. Барнаул

Пусть (M, g) – (псевдо)риманово многообразие. Определим на M метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где V – фиксированное векторное поле, X и Y – произвольные векторные поля, ∇^g – связность Леви-Чивита. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [1], и называется *метрической связностью с векторным кручением* или *полусимметрической связностью* (с точностью до направления).

Данная связность играет важную роль в случае двумерных поверхностей, так как в этом случае любая метрическая связность является связностью с векторным кручением [1].

Тензор кривизны метрической связности ∇ с векторным кручением определяется аналогично общему случаю равенством

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Важная теорема о связи конформных деформаций и метрических связностей с векторным кручением была доказана К. Яно в работе [2].

Теорема. Риманово многообразие допускает метрическую связность с векторным кручением, тензор кривизны которой равен нулю, тогда и только тогда, когда оно является конформно плоским.