УДК 514.76

Инвариантные парасасакиевы структуры на группах Ли

Н.К. Смоленцев
КемГУ, г. Кемерово

В данной работе изучаются левоинвариантные параконтактные структуры Сасаки группах Ли, которые получаются центральными расширениями из почти паракэлеровых структур на группах Ли. Тема параконтактных структур является в настоящее время достаточно популярной, есть несколько различных подходов к определению понятия параконтактных и парасасакиевых структур [1], [2], [3]. В данной работе параконтактные структуры Сасаки определяются по той же схеме, что и обычные структуры Сасаки в случае контактных структур [4].

1. Параконтактные структуры. Дифференцируемое ($2n$+1)-мерное многообразие M называется [4] *контактным многообразием*, если на нем задана дифференциальная 1-форма η, такая что $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1}. Контактная форма η определяет на M^{2n+1} распределение $D = \{X \in TM^{2n+1} \mid \eta(X) = 0\}$ размерности $2n$, которое называется контактным. Контактное многообразие M^{2n+1} имеет векторное поле ξ, называемое полем Риба, которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$, для всех векторных полей X на M^{2n+1}. Легко видеть, что $L_\xi \eta = 0$.

Определение 1. *Параконтактной структурой на многообразии M^{2n+1} называется тройка (η, ξ, φ), где η – контактная 1-форма, ξ – поле Риба и φ – аффинор на M^{2n+1}, обладающие свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $\varphi^2 = I - \eta\otimes\xi$. Кроме того, аффинор φ действует на распределении D как паракомплексная структура*.

Пусть M^{2n+1} – параконтактное многообразие. Рассмотрим прямое произведение $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$. Векторное поле на $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$ представим в виде $(X, f\partial_t)$, где X – касательное к M^{2n+1}, t – координата на $\mathbf{R}$ и f – функция на $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$. Следуя [4], дадим

Определение 2. *Параконтактная структура (η, ξ, φ) называется нормальной, если интегрируема почти паракомплексная структура J на $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$, определенная формулой $J(X, f\partial_t) = (\varphi X - f\xi, -\eta(X)\partial_t)$.*

Выразим условие интегрируемости структуры J в терминах аффинора φ на M^{2n+1}. Условием интегрируемости является обращение в нуль кручения Нейенхейса [5]:

$$[J, J](X, Y) = J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] = 0.$$

Вычислим это кручение сначала на векторных полях типа $(X,0)$, а затем для пар $(X,0),(0,\partial_t)$.

$$[J,J]\big((X,0),(Y,0)\big) = ([X,Y],0) + [(\varphi X, -\eta(X)\partial_t),(\varphi Y, -\eta(Y)\partial_t)] -$$
$$-J[(X,0),(\varphi Y, -\eta(Y)\partial_t)] - J[(\varphi X, -\eta(X)\partial_t),(Y,0)] =$$
$$= (\varphi^2[X,Y] + \eta([X,Y])\xi, 0) + \Big([\varphi X,\varphi Y], \big(-\varphi X(\eta(Y)) + \varphi Y(\eta(X))\big)\partial_t\Big)$$
$$-\big(\varphi[X,\varphi Y] + X(\eta(Y))\xi, -\eta([X,\varphi Y])\partial_t\big) -$$
$$-\big(\varphi[\varphi X,Y] - Y(\eta(X))\xi, -\eta([\varphi X,Y])\partial_t\big) =$$
$$= \Big([\varphi,\varphi](X,Y) - d\eta(X,Y)\xi, \big(-(L_{\varphi X}\eta)(Y) + (L_{\varphi Y}\eta)(X)\big)\partial_t\Big).$$
$$[J,J]\big((X,0),(0,\partial_t)\big) = J^2[(X,0),(0,\partial_t)] + [(\varphi X, -\eta(X)\partial_t),(-\xi, 0)] -$$
$$-J[(X,0),(-\xi,0)] - J[(\varphi X, -\eta(X)\partial_t),(0,\partial_t)] =$$
$$= \big(-[\varphi X,\xi], -\xi(\eta(X))\partial_t\big) - J(-[X,\xi],0) = \big((L_\xi\varphi)(X), -(L_\xi\eta)(X)\partial_t\big)$$

Таким образом, условие интегрируемости паракомплексной структуры J выражается обращением в нуль четырех тензоров:

$$N^{(1)}(X,Y) = [\varphi,\varphi](X,Y) - d\eta(X,Y)\xi,$$
$$N^{(2)}(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta)(Y) - (L_{\varphi X}\eta)(X),$$
$$N^{(3)}(X,Y) = (L_\xi\varphi)X, \qquad N^{(4)}(X,Y) = (L_\xi\eta)(X).$$

Однако из обращения в нуль тензора $N^{(1)}$ следует, что и остальные тензоры также обращаются в нуль (доказательство полностью повторяет аналогичное доказательство из [4]). Поэтому условие нормальности параконтактной структуры только следующее: $N^{(1)}(X,Y) = 0$.

Определение 3. *Если M^{2n+1} контактное многообразие с контактной формой η, то параконтактной метрической структурой называется четверка (η,ξ,φ,g), где ξ – поле Риба, g – псевдориманова метрика на M^{2n+1} и φ – аффинор на M^{2n+1}, для которых имеют место следующие свойства:*

$$\varphi^2 = I - \eta\otimes\xi, \quad d\eta(X,Y) = g(X,\varphi Y),$$
$$g(\varphi X,\varphi Y) = -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика g для параконтактной структуры полностью определяется аффинором φ:

$$g(X,Y) = -d\eta(\varphi X,Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Определение 4. *Параконтактная метрическая структура (η,ξ,φ,g) называется парасасакиевой, если $N^{(1)}(X,Y) = 0$.*

2. Параконтактные структуры на центральных расширениях групп Ли. Если в качестве многообразия рассматривается группа Ли G, то естественно рассматривать левоинвариантную контактную структуру. В этом случае контактная форма η, поле Риба ξ, аффинор φ и ассоциированная метрика g задаются своими значениями в единице, т.е.

на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Мы будем называть $\mathfrak{g}$ *контактной алгеброй Ли*, если на ней заданы контактная форма $\eta \in \mathfrak{g}^*$ и вектор $\xi \in \mathfrak{g}$, такие, что $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$. Заметим, что $d\eta(x, y) = -\eta([x, y])$.

Центральное расширение симплектической алгебры Ли $(\mathfrak{h}, \omega)$ есть алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbf{R}$, в которой скобки Ли задаются следующим образом: $[X, \xi]_\mathfrak{g} = 0$, $[X, Y]_\mathfrak{g} = [X, Y]_\mathfrak{h} + \omega(X, Y)\xi$ для любых $X, Y \in \mathfrak{h}$, где $\xi = \partial_t$ – единичный вектор из $\mathbf{R}$. На алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbf{R}$ существует контактная форма вида $\eta = \xi^*$. Отметим, что если $x = X + \lambda\xi$ и $y = Y + \mu\xi$, где $X, Y \in \mathfrak{h}$, тогда:

$$d\eta(x, y) = -\eta([x, y]) = -\xi^*([X, Y]_\mathbf{h} + \omega(X, Y)\xi) = -\omega(X, Y).$$

Для задания аффинора φ на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbf{R}$ можно использовать почти паракомплексную структуру J на $\mathbf{h}$ следующим образом: если $x = X + \lambda\xi$, где $X \in \mathfrak{h}$, то $\varphi(x) = JX$. Если структура J на $\mathfrak{h}$ будет еще и согласованной с ω, т. е. обладать свойством $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$, то мы получим параконтактную метрическую структуру (η, ξ, φ, g) на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbf{R}$, где $g(X, Y) = -d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$. Пусть $h(X, Y) = \omega(X, JY)$ – ассоциированная (псевдо)риманова метрика на симплектической алгебре Ли $(\mathfrak{h}, \omega)$. Тогда для $x = X + \lambda\xi$ и $y = Y + \mu\xi$, где $X, Y \in \mathfrak{h}$, имеем:

$$g(x,y) = \omega(JX, Y) + \lambda\mu = -h(X, Y) + \lambda\mu.$$

Предложение 1. *Пусть $(\mathfrak{h}, \omega, J)$ – почти паракэлерова алгебра Ли и (η, ξ, φ, g) – соответствующая ей параконтактная метрическая структура на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbf{R}$. Тогда кручение Нейенхейса $[\varphi, \varphi]$ на $\mathbf{g}$ следующим образом выражается через кручение Нейенхейса $[J, J]$ почти пракомплексной структуры J на $\mathbf{h}$:*

$$[\varphi, \varphi](x, y) = [J, J](X, Y) + d\eta(x, y)\xi$$

где $x = X + \lambda\xi$ и $y = Y + \mu\xi$ и $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Следствие 1. *Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbf{R}$. является (псевдо) сасакиевой тогда и только тогда, когда симплектическая алгебра $(\mathfrak{h}, \omega, J)$ является (псевдо) паракэлеровой.*

Установим формулы, связывающие свойства кривизны почти паракэлеровых алгебр Ли и полученных из них центральными расширениями контактных структур. Если ∇ – ковариантное производная на $\mathbf{g}$ и D – ковариантное производная на $\mathbf{h}$, то для $X, Y \in \mathfrak{h}$ имеем следующие соотношения [3]:

$$\nabla_X Y = (D_X Y)_\mathfrak{h} + \tfrac{1}{2}\,\omega(X, Y)\xi,$$

$$\nabla_X \xi = \nabla_\xi X = -\tfrac{1}{2} JX \text{ и } \nabla_\xi \xi = 0.$$

Теорема 1. *Пусть* (ω, J, h) *– почти паракэлерова структура на алгебре Ли* $\mathbf{h}$ *и* $(\eta,\ \xi,\ \varphi,\ g)$ *– соответствующая ей параконтактная метрическая структура на центральном расширении* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\times_{\omega}\mathbf{R}$. *Тогда тензор кривизны* R *на* $\mathfrak{g}$ *выражается через тензор кривизны* $R_{\mathfrak{h}}$ *на* $\mathfrak{h}$, *форму* ω *и почти паракомплексную структуру* J *на* $\mathfrak{h}$ *по формулам*:

$$R(X,Y)Z = R_{\mathfrak{h}}(X,Y)Z - \tfrac{1}{2}\, D_Z\,\omega(X,Y)\,\xi - \tfrac{1}{4}\,(\omega(Y,Z)JX -$$

$$- \omega(X,Z)JY) + \tfrac{1}{2}\,\omega(X,\ Y)JZ,$$

$$R(X,Y)\xi = -\tfrac{1}{2}\,((D_X J)Y - (D_Y J)X),$$

$$R(X,\xi)Z = -\tfrac{1}{2}(D_X J)Z - \tfrac{1}{4}\,g(X,Z)\xi, \qquad R(X,\xi)\xi = \tfrac{1}{4}\,X,$$

где $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Библиографический список

1. Bejan C.L., Eken S., Kılıç E. Legendre Curves on Generalized Paracontact Metric Manifolds,. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2019) 42:185–199.
2. Prakasha D.G., Para-Sasakian manifolds and *-Ricci solitons [Электронный ресурс] / D.G. Prakasha, Pundikala Veeresha // Cornell University Library: архив электронной печати. – Электрон.данные. – Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/1801.01727v1.pdf.
3. Smolentsev N. K. Invariant pseudo-Sasakian and K-contact structures on seven-dimensional nilpotent Lie groups. SCIENCE EVOLUTION, 2017, vol. 2, no. 1, 91 – 99.
4. Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976.
5. Алексеевский, Д. В. Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна [Текст] / Д. В. Алексеевский, К. Медори, А. Томассини: Успехи математических наук. – 2009. – том 64, выпуск 1(385). – С. 3–50. – Режим доступа: https://doi.org/10.4213/rm9262.

УДК 579.64

Построение связной суммы компактных поверхностей

М.А. Чешкова

АлтГУ, г. Барнаул

Любая компактноя поверхность гомеоморфна либо сфере, либо связной сумме торов, либо связной суммы проективных плоскостей [1, с. 24]. Римская поверхность, поверхность Боя и скрещенный колпак являются моделью проективной плоскости.